

JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT

Projektrapport af:

Birgit Andresen,

Beatriz Quinones &

Jimmy Staal

Vejleder:

Mogens Niss

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

Jorden rundt på flade kort

af

Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.

Vejleder: Mogens Niss.

IMFUFA tekst nr. 111/85, RUC. 108 sider. ISSN 0106-6242

Abstract:

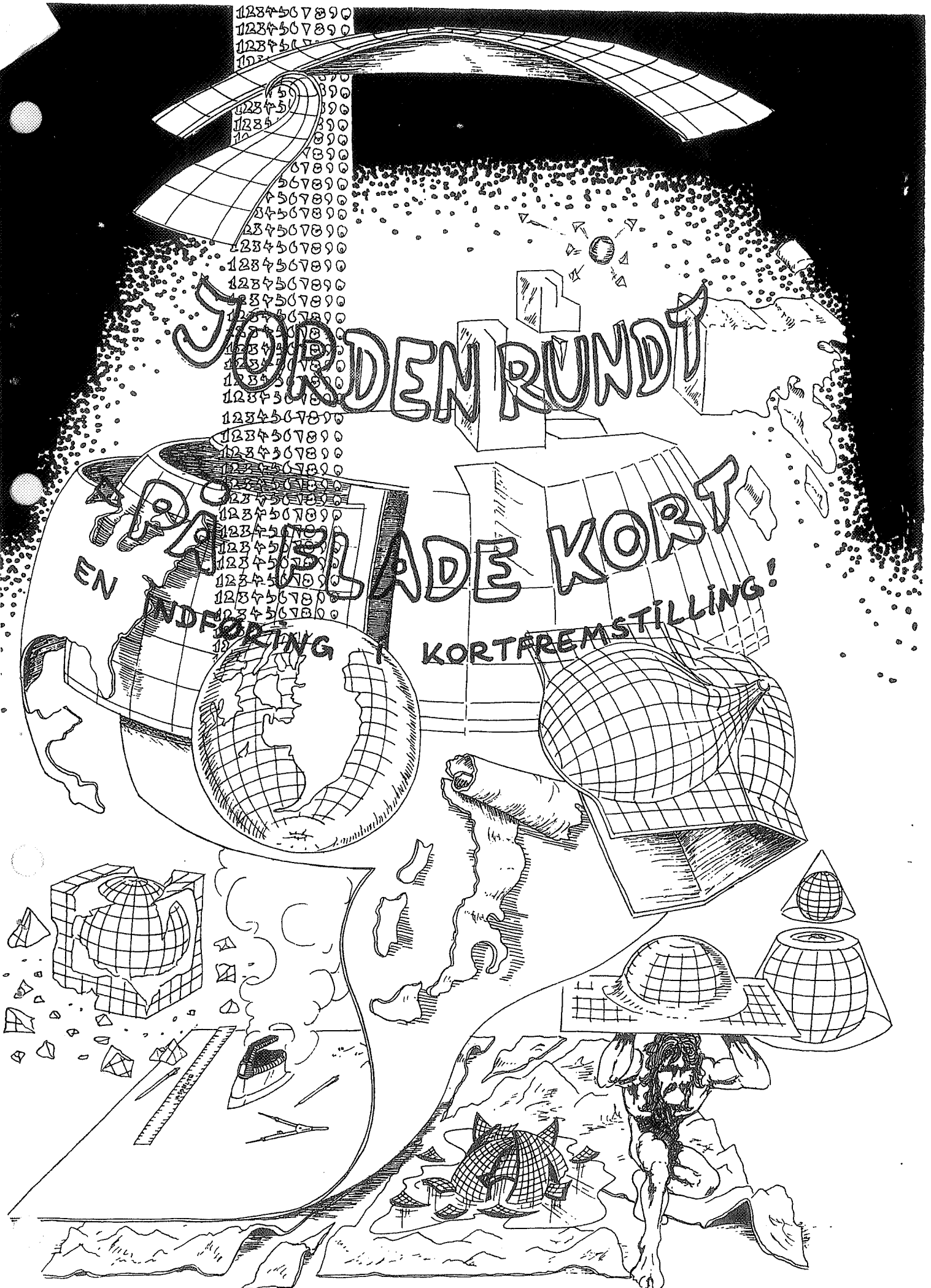
Nærværende rapport er dels materiale til undervisning i geometri i gymnasiet, dels en afdækning af dele af den løbende geometridebat.

Rapporten består af 5 dele. Første del er en kortfattet beskrivelse af nogle kartografihistoriske begivenheder og metoder. Anden del introducerer begreber og ikke-vektorielle beregningsmetoder i forbindelse med kugleoverfladen. Tredie del er hovedafsnittet omhandlende forskellige kortprojektioner. I 4. del opfordres til egenhændige kortfremstillinger. Her er desuden nogle få repetitionsopgaver.

5. del er et afsnit, som ikke hører med til selve materialet, men som i mindre omfang diskuterer egenskaber ved geometri.

BLADE KORT

INDFORING **KORTFREMSTILLING!**



JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT

-en indføring i kortfremstilling!

af:

Beatriz Quiñones

Jimmy Staal

Birgit Andresen

vejleder:

Mogens Niss

1985



1

2

3

4

5

6

7

Indholdsfortegnelse.

Forord.....	1
Indledning.....	3
En kartografiens historie.....	4
Kuglegeometri.....	16
Lidt modelsnak.....	16
Vinkler og afstande.....	17
Kugleoverfladens geometri.....	19
Sfæriske koordinater.....	25
Sfærisk afstand.....	26
Arealer.....	30
Længde- og breddegradssystemet.....	30
Breddegrader.....	31
Længdegrader.....	31
Positionsangivelse på Jorden.....	32
Afstandsberegning.....	33
Arealbestemmelse.....	34
Jordens form.....	35
Kortprojektioner/indledning.....	37
Mere modelsnak.....	41
Planprojektioner (azimuthalprojektioner).....	42
Den orthografiske projektion.....	45
Den gnomoniske projektion.....	52
Cylinderprojektioner.....	57
Den centralcylinderiske projektion.....	58
Mercatorprojektion.....	64
Lamberts arealbevarende cylinderiske projektion.....	68
Kegleprojektioner.....	73
Den simple perspektiv kegleprojektion.....	75
Opklipning.....	82
Afslutning.....	84
Konstruktioner.....	86
Gnomonisk projektion.....	86
Orthografisk projektion.....	88
Centralcylinderisk projektion.....	89
Arealbevarende cylindrisk projektion.....	90
Simpel perspektiv kegleprojektion.....	90
Opgaver.....	93
Litteratur- og referenceliste.....	96



Forord.

Vi er tre matematikstuderende ved Roskilde Universitetscenter. Det foreliggende materiale er resultatet af vores tanker om, hvordan indholdet i et geometriforløb i en matematisk gymnasieklasse kan udformes. Med baggrund i et forslag til ændring af bekendtgørelsen for faget matematik, hvor specielt rumgeometri er en nyskabelse, idet denne disciplin har været ude af gymnasiepensum i en årrække, har vi skrevet foreliggende hæfte.

Det er hensigten, at materialet skal kunne bruges som emnelæsning i den matematisk-fysiske gren eller til at udfylde de obligatoriske 10-15 timers emnelæsning i et geometrisk emne, som er foreslået i bekendtgørelsesforslaget.

Det er ikke en traditionel lærebog i geometri. Snarere har vi tilstræbt at få anbragt matematikken som et redskab i forbindelse med et andet fagområde: Geografi; og et tværfagligt samarbejde kunne eksempelvis åbne mulighed for, at trianguleringsmetoden kunne afprøves i praksis og derved etablere en dybere forståelse af, hvordan bl.a. landmåling foregår.

Materialet er opbygget således, at der indledes med et historisk afsnit, der skulle give emnet "kartografi" et perspektiv, som (i det væsentlige) er ualmindeligt for matematikbøger. Dernæst indeholder materialet et "teoriafsnit", hvor den del af kugleoverfladens geometri, som er nødvendig for at forstå egenskaberne ved de mange forskellige korttyper, gennemgås. Herefter følger en beskrivelse af 3 forskellige typer kortprojektioner, som hver især er gennemgået således, at de kan læses uafhængigt af hinanden. Dette rundes af med en kort oversigt over den moderne kartografi. Materialet indeholder til slut nogle opgaver, som uddyber de enkelte afsnit. Opgaverne i forbindelse med de tre typer kortprojektioner er temmelig omfangsrige, hvorfor det forekommer nærliggende, at man i grupper går i dybden med en enkelt projektion.

For at få det fulde udbytte af stoffet forudsættes et grundigt kendskab til trigonometriske funktioner og eventuelt lidt differential- og integralregning. Desuden er en alminde-

lig forståelse af planers og linjers egenskaber nok ønskværdig, men ikke nødvendig.

Det er helt bevidst undgået at inddrage vektorregning og analytisk geometri, da vi anser for vigtigere at bruge geometrien. Dette forhindrer ikke en sideløbende indføring i disse discipliner, men det vil betyde en væsentlig forøgelse af tiden til materialets gennemgang.

Materialet er primært beregnet på en undervisning, som i starten er lærercentreret, mens de tre kortprojektionsafsnit med fordel kan uddybes gennem gruppearbejde.

0. Indledning.

Alle har formentlig på et eller andet tidspunkt siddet med et verdenskort, et landkort eller et søkort i hænderne og f. eks. forsøgt at bestemme afstande mellem to byer. Eller du har sammenlignet forskellige områders arealer. Men det er nok de færreste der har vidst og udnyttet, at sådanne kort på flere måder afviger væsentligt fra virkeligheden på Jordens overflade. Om muligt, har endnu færre kendskab til, hvorledes disse kort fremstilles.

Da kort samtidig har vide og vigtige anvendelsesområder, må det anses for temmelig relevant, at få et vist kendskab til, hvilke oplysninger og mangler forskellige korttyper besidder.

Kort har gennem tiderne udviklet sig fra at være et nødvendigt værktøj for de herskende klassers interesse i at opretholde deres magt til at være et lige så nødvendigt redskab for os andre i vores dagligdag, blandt andet for at vi kan få et overblik over begivenhederne i verden.

I de kommende kapitler skal vi støbe et bredt kartografisk fundament, så man fremover vil få et anderledes forhold til det at se på og at bruge kort. Man vil forhåbentlig ad denne vej også komme et skridt nærmere forståelsen af matematikkens og specielt geometriens relevans, hvilket er dette hæftes væsentligste hensigt.

1. En kartografiens historie.

Der har altid været årsager til, at kort er blevet fremstillet. Disse årsager er i regelen udtryk for behov hos forskellige magtcentre til forskellige tider og steder. Om dette og om, hvordan nogle kartografitekniske problemer er løst gennem tiderne, handler det følgende.

De kommende kapitler beskriver primært metoder til fremstilling af små-skalakort, dvs. kort over forholdsvis store områder, hvorved afstande målt på kortet bliver meget små i forhold til de reelle afstande målt på Jorden. Der findes imidlertid også kort over mindre områder: Byer, små lande etc., som er fremstillet ved brug af andre teknikker, nemlig ved landmåling - og ikke ved hjælp af tabeller over astronomiske målinger, som småskalakortene er det. Sådanne kort kaldes stor-skalakort.

At fremstille verdenskort kræver nødvendigvis kendskab til Jordens form og størrelse, samt områders indbyrdes beliggenhedsforhold, hvilket medfører positionsbestemmelse f. eks. bestemmelse af længde- og breddegrader. Derudover må der antages at foreligge et behov for verdenskort, før man kaster sig på at løse denne opgave. Derfor er de tidligste kort over områder på Jorden foretaget efter landmålingsprincippet, altså stor-skalakort. Man har på den tid ikke været sig Jordens omfang og kontur bekendt, og har ikke haft globale hensigter iøvrigt. De første kendte kort er flere tusinde (omkring 5000-6000) år gamle og afbilder lokale områder i Mesopotamien og Egypten m.m. Man mener at kunne tilskrive deres eksistens som værende et led i en inddrivelse af jordskatter, der var baseret på opmålinger af jordes størrelser og kvalitet. Landmålere bliver senere tituleret geometere; dette græske ord betyder direkte oversat - jordmålere.

De første bud på Jordens "virkelige" form opstod i Grækenland 500 - 600 år før år nul. Pythagoras (ca. 580-500 fvt.) menes at være den første, der fremturede med ideen om, at Jorden er kugleformet - "den smukkeste af alle figurer". Han havde dog ikke konkrete fakta at begrunde sin teori med. En anden græker, Eratosthenes (f. 276 fvt.), benyttede denne teori til at be-

regne Jordens omkreds. Han observerede, at Solen stod i zenit over Syene (Aswan) på en bestemt dag i året - og Solen gav således ikke anledning til, at lodrette genstande kastede skygge. På samme tidspunkt kastede Solen skygge svarende til 7.2° med normalen til jordoverfladen i Alexandria. Under antagelse af, at Jorden er rund som en kugle, kunne han, ved at skønne afstanden mellem de to byer, bestemme Jordens omkreds og dermed radius. Jordens middelomkreds målt i vor tid er ca. 40,000km, den samme værdi som Eratosthenes fandt, endda på trods af at han gjorde flere fejl, men de ophævede hinanden. (Konf. med opg. 1 side 93.)

Eratosthenes' verdensbillede er bemærkelsesværdigt, idet det i princippet er identisk med det nu kendte, altså at det er planeterne inklusive Jorden, der roterer i baner om Solen.

Omkring år 100 indtager alexandrineren Ptolemaios (levede omkr. år 100) den kartografiske verdensscene. Det mest kendte "verdenskort" fra antikken stammer fra denne mand.

Antikkens grækere er på mange måder kendt for at være foregangsfolk for vestlig kultur. Et af områderne er introduktionen af den (natur-) videnskabelige tankegang og metode. Viden om naturen bliver her struktureret og gjort til genstand for teorier om verdens indretning. I dette forhold har Ptolemaios formodentlig hentet sin umiddelbare inspiration til sit "verdenskort" (fig.1).

På Ptolemaios' tid har der i Middelhavsområdet, men også i det nordlige Europa, foregået en udpræget handel med varer. Endvidere har Romerriget haft krigsmæssige relationer disse steder. Den heraf følgende omfattende sejlads kan begrunde, hvorledes Ptolemaios har etableret sine data. Man har på togterne optegnet de ruter man sejlede. På denne baggrund har Ptolemaios formentlig samlet et billede af den tids kendte verden dvs. Nordafrika, det meste af Europa og omtrent halvdelen af Asien. Da Middelhavsområdet var det mest besejlede vand og dermed det bedst kendte område overhovedet, er Middelhavsområdet da også det mest nøjagtige på kortet.

Det er muligvis en tilsnigelse at kalde det omtalte kort for

Ptolemaios' egen, for der foreligger intet sikkert om, at han selv har tegnet kortet. Men han har nedskrevet alle de nødvendige data og metoder til forehavendet, som måske en anden adskillige århundreder senere har fuldført?

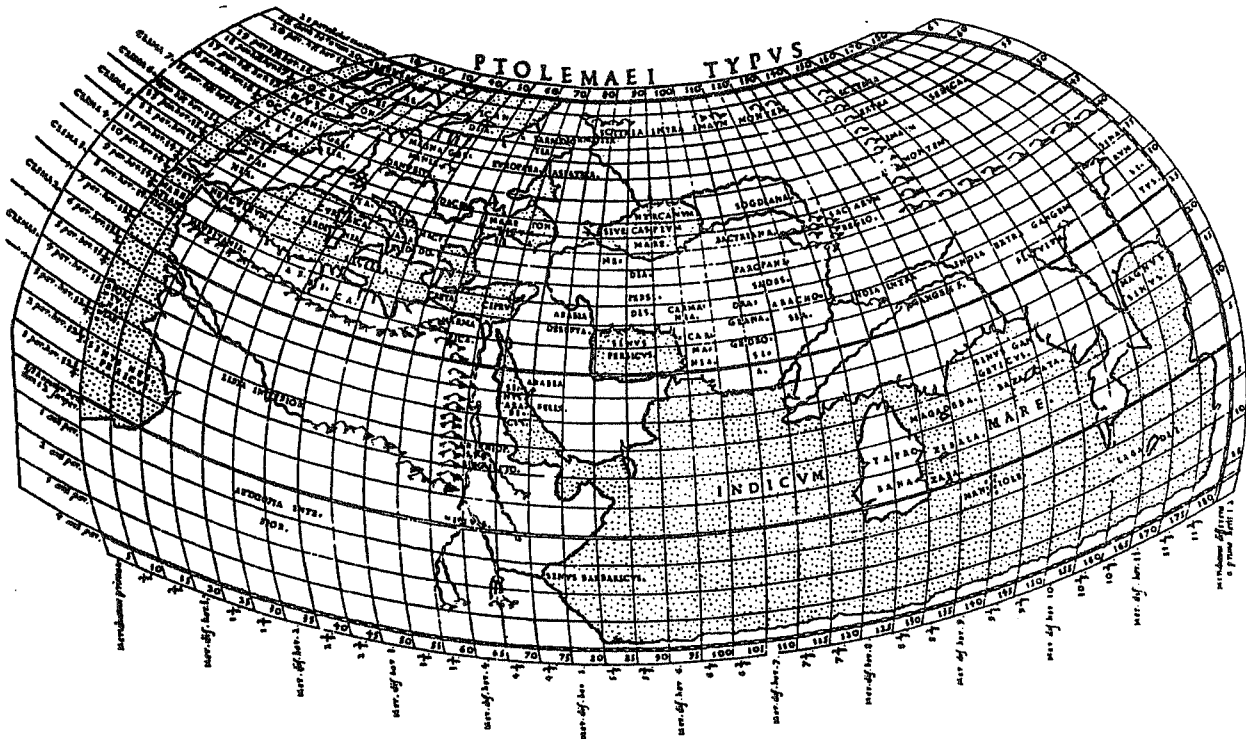


Fig.1: Ptolemaios' verdenskort. Kortet er taget fra Bo Bramsens, Gamle Danmarkskort (1965).

Når et verdenskort skal tegnes, tages udgangspunkt i nogle astronomiske målinger - og ikke landmåling. De målinger vi tænker på er længde- og breddegradsbestemmelser. Hvorledes disse bliver tilvejebragt bliver beskrevet senere i kapitlet. Men en forudsætning for bestemmelserne er dog at have etableret et inddelings-system.

Det er kendt, at babylonerne på et forholdsvis tidligt tidspunkt kendte til at inndelege en cirkel i grader - endda i 360° . Men det er en græker, Dikæarchos (326 - 296 fvt.), som introducerer breddebuerne. Selv indtegner han dog kun én på sine kort. Den førromtalte Eratosthenes forfølger ideen, men indtegner flere breddebuer på sine kort (fig. 2). Med Ptolemaios' kort bliver inddelingssystemet næsten fuldstændiggjort. Hermed bliver dette kort sidste bemærkning til kartografiens første guldalder. Kortet bliver ikke ændret synderligt i de efter-

følgende ca. 1100 -1200år!

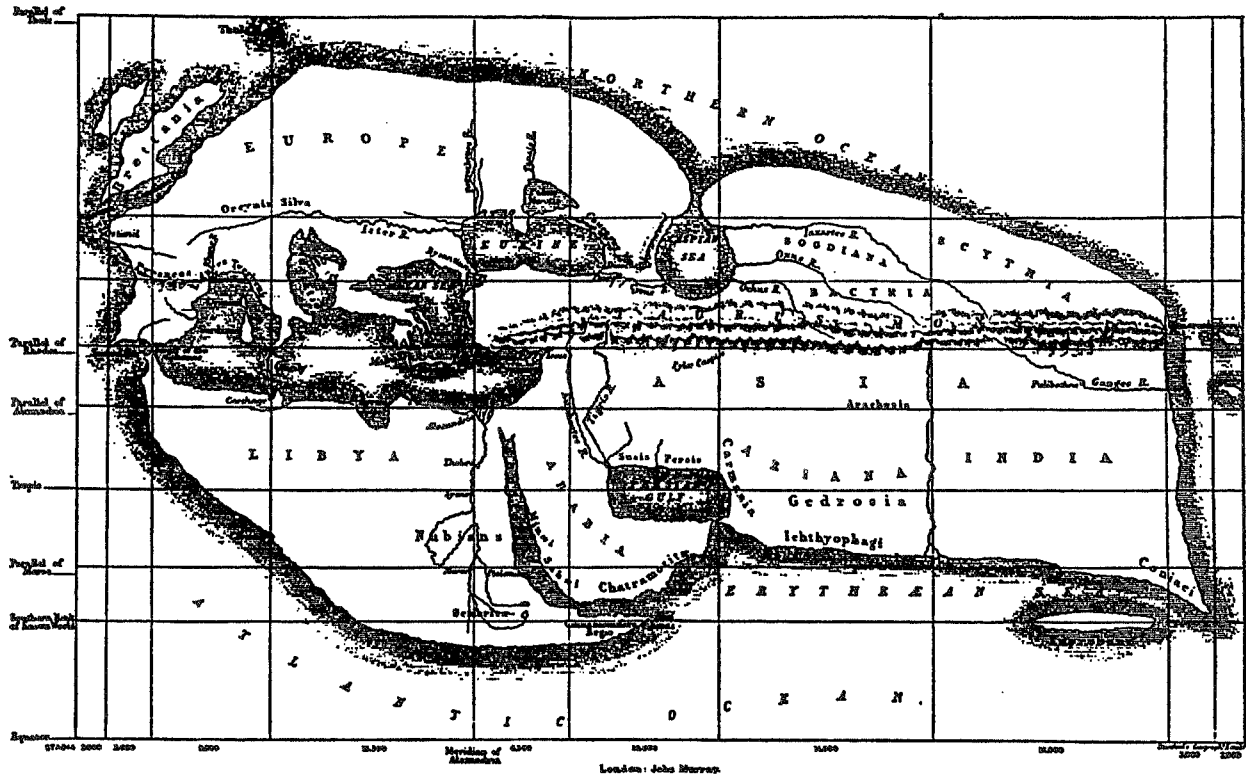


Fig.2: Eratosthenes' verdenskort. Bemærk forskellene mellem dette kort og Ptolemaios'. Fra Gamle Danmarkskort af B. Bramsen (1965).

*

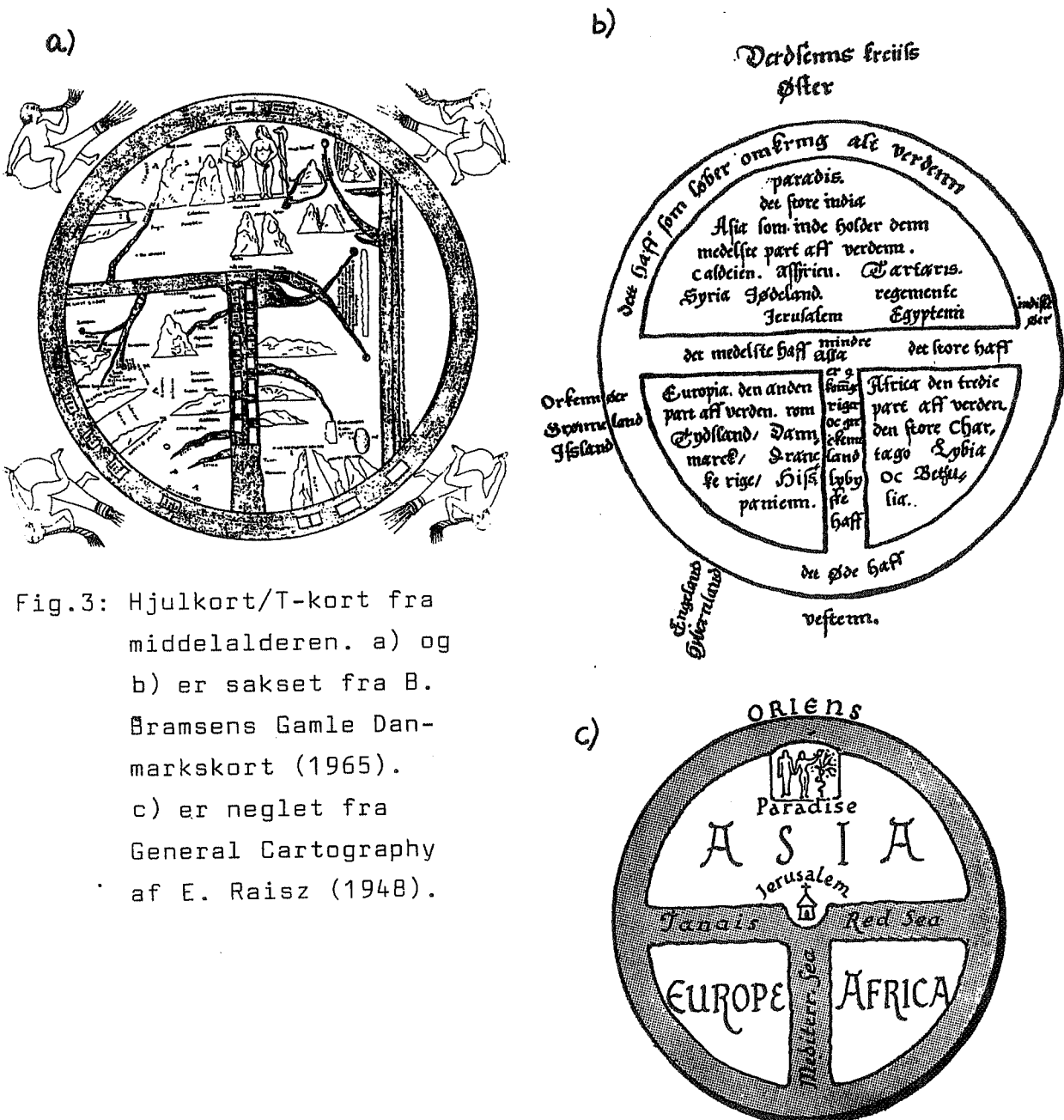
Vi antydede før, at Eratosthenes' verdensbillede er heliocentrisk: Helios er Solen i græsk gudeskikkelse. Dette syn på verden bevares frem til Ptolemaios. For ham støtter observationer af planeterens bevægelser en teori om, at Jorden er centrum for verden - det er det såkaldt geocentriske verdensbillede. Det har dog ikke umiddelbar betydning for kartografien, om Jorden ligger centralt i verden eller, om den bevæger sig om Solen. Betydning har derimod dens form.

*

Under Romerrigets forfald begynder en religiøs trosretning at vinde større og større udbredelse. Det er kristendommen, der efterhånden overtager de ideologiske, politiske, kulturelle og "videnskabelige" funktioner i Europas samfund. Kristendommen

udsletter praktisk talt alle videnskabelige tankesæt skabt under det græsk-romerske kulturherredømme. Det bliver herefter ikke længere væsentligt at beskæftige sig med Jordens "udseende". Men det er derimod vigtigt at oppebære en tro på Gud og Jesus og de bibelske sandheder. Heraf uddrages også ideen om at Jorden er flad, nemlig beliggende på Guds flade hånd. Dette verdensbillede betyder i kartografisk henseende en meget gold periode.

Dette til trods bliver der fremstillet kort. Men deres indhold udmærker sig ved fuldstændig mangel på indsigt i omverdenens udseende. De afbilder i det væsentlige kun den kristne tros hovedhjørnesteene dvs. paradys, Jerusalem osv. (se fig. 3).



Det er i tiden efter Columbus genopdager Amerika - og den der-af afledte kolonialisering (imperialisering), at (videnskabelig) kartografi gennemlever sin anden guldalder. Specielt bliver der udviklet et kort - fremstillet af Gerard Mercator (1512-1584) - der er enestående til søfartsbrug på store og små have. (Kortet bliver omtalt grundigere under cylinderprojektioner i kapitel 3).

Samme Mercator er iøvrigt ophav til en større kortsamling, der udkommer i 1569. Atlas er en græsk-mytologisk kæmpe, der er blevet pålagt at bære himmelhvælvingen. På titelbladet af Mercators kortsamling figurerer Atlas med en udgave af jordkloden. Dette bliver anledningen til, at de senere større kort-samlinger betegnes atlas.

Det er også i denne periode, at flere europæiske lande ønsker at blive kortlagt. Karakteristisk er det de respektive landes overhoveder, der pålægger kompetente kortmagere og landmålere forehavendet. Og derved er landenes militær ligeledes essentielle drivkræfter bag kortlægningen.

Det første store kortlægningsarbejde blev startet i 1747 i Frankrig. Det enevældige franske styre, som var stærkt centraliseret, krævede ensartede kort. De interesser, som lå bag arbejdet var opmåling af landbrugsarealer til beskatning, udbygning af infrastrukturen (dvs. vejnet) og militærstrategiske bekvemmeligheder.

*

Da små-skalakortenes fremstillingsmetode bliver grundigt behandlet i kapitel 3, beskriver vi nu - i begrænset omfang - metoden til fremstilling af stor-skalakort. Metoden, der bruges, kaldes triangulering. Grundlaget har været kendt siden oldtiden, men beskrives først i 1553 af Gemma Frisius, der bla. opmålte afstanden mellem Bruxelles og Antwerpen.

Metoden er, at man har placeret et målebord (fig. 4), som er en plan flade, hvorpå der udglattes et stykke papir. I landskabet, man vil optegne, vælges nogle punkter f. eks. en bonde-

gård (B), en kirke (K) og et træ (T). Det faste målebordspunkt kalder vi M. Dette punkt afmærkes med en prik et sted

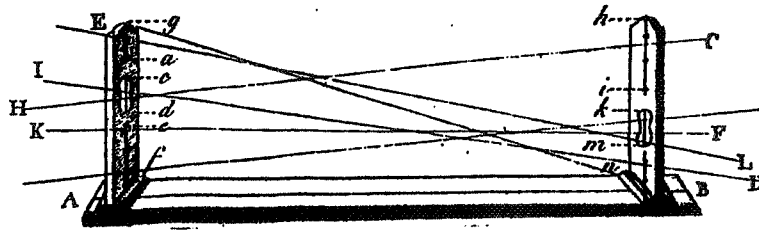


Fig. 4: Et målebord. Figuren er hentet fra K. Nielsens: Hvordan Danmarkskortet kom til at ligne Danmark, (1982).

på papiret. En lineal, som i hver ende er forsynet med opretstående sigter, placeres på målebordet gennem M. Herfra sigter man så til B, K og T og tegner linjer langs linealen til M. Man opmåler dernæst med målekæder, et hjul med afmærkninger eller med træstokke afstanden mellem M og ét af de andre punkter f. eks. T (fig. 5). I T tages så sigte til M, B og K. På denne måde har man vinklerne i trekant MKT og trekant MBT og siden MT. Heraf kan man beregne de øvrige stykkers længde (evt. ved hjælp af sinus-relationerne). Man skal så bare fastslå et målestoksforhold, for derefter at indtegne punkterne på målebordspapiret. For at kortlægge et større område skal man blot tage sigte til nye punkter fra de allerede registrerede og ellers følge samme procedure, dog uden at måle afstande, thi man kan beregne dem af de oprindelige trekanter, og herved ophobes usikkerhederne på de oprindelige målinger.

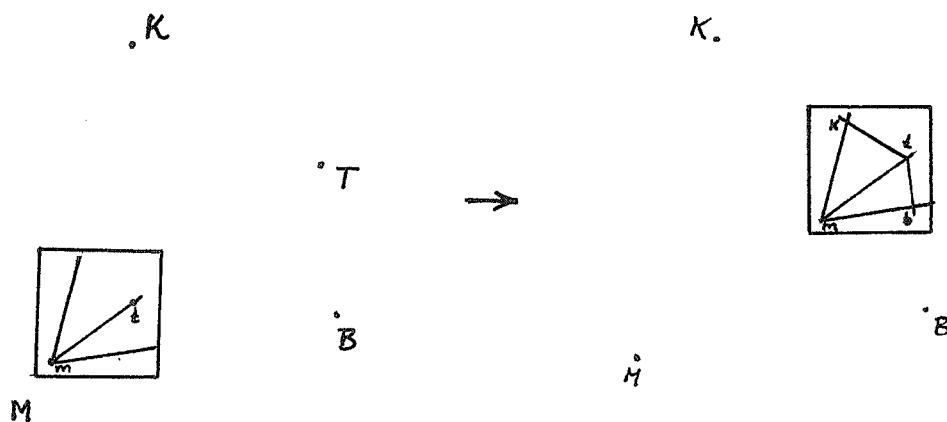


Fig.5: Skitse af trianguleringsmetoden. Forkl. findes i teksten.

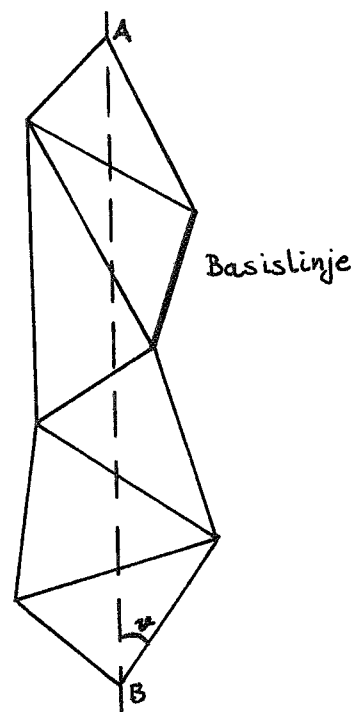
Fig.6: Skitse af trianguleringsmetoden.

A og B ligger på samme længdebue.

Udfra kendskab til basislinjens længde og vinklen v kan samtlige vinkler samt afstanden beregnes.

Hvis A har breddegraden (dette begreb vender vi tilbage til)

φ_A og B breddegraden φ_B er breddegradsforskellen mellem A og B følgelig $\varphi_A - \varphi_B$. Sættes afstanden mellem to på hinanden følgende breddegradsbuer målt langs en længdebue til k (enhed: km/grad), ses afstanden mellem A og B at være $k(\varphi_A - \varphi_B)$.



*

Efter middelalderen genoplives den naturvidenskabelige metode. I 1687 udkommer en bog: "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" - naturfilosofiens matematiske principper - af Isaac Newton (1642-1727). I den angives beregningsmetoder til bestemmelse af Jordens egentlige form, som vi opfatter den idag. Udfra den almene massetiltrækningslov kan udledes, at Jorden burde være affladiget ved polerne. Dette synspunkt bliver dog ikke almindeligt akcepteret før langt senere. Nær Paris i Frankrig havde man nemlig i 1670 udført målinger på afstande mellem to breddegrader. Og disse målinger antydede, at Jorden var affladiget ved ækvator! Man havde brugt triangulationsmetoden til beregningerne, og det er klart, at sådanne målinger er behæftet med usikkerheder, der efterhånden hober sig op under udmålingerne. Hvor stor den endelige usikkerhed var, havde man ikke metoder til at afgøre før omkring år 1800.

Afgørelsen på problemet med fladheden faldt i 1736, hvor man målte afstanden svarende til én breddegrad i Peru, og det samme gjordes i Lapland. Den målte afstand i Lapland var klart

mindre end den tilsvarende fundet i Peru, og dermed konkluderedes, at Jorden er fladere ved polerne end ved ækvator.

*

Vi har tidligere nævnt, at en nødvendig forudsætning for fremstilling af små-skalakort er længde- og breddegradsbestemmelser. Som udgangspunkt for fremstilling af stor-skalakort behøves i hvert fald én sådan bestemmelse. Derfor vil vi eksemplificere metoden til bestemmelse af længdegrader på landjorden ved at inddrage kortlægningen af Danmark.

Det Kongelige Videnskabernes Selskab oprettet i 1742 betalte og ledede i perioden 1760-1820 den første systematiske kortlægning af Danmark. Udgangspunktet for trianguleringen af landet var Rundetårn i København. Det er således Rundetårns position, der bliver gradbestemt. Thomas Bugge (1740-1815), som ledede denne kortlægning foretog selv nogle af de astronomiske målinger, der fastlagde positionen.

Til bestemmelse af længdegraden udnyttede han, at Jorden roterer én gang om sig selv - dvs. 360° - på 24 timer. I København aflæstes klokkeslet for bestemte positioner af planeten Jupiters måner observeret fra Rundetårn. Klokkeslettet for de bestemte observationer er afhængig af længdegraden, hvorfra observationen foretages. Thomas Bugge har ladet en bestemt længdebue gennem Paris være sin nulmeridian (nulmeridianen gennem Greenwich er først vedtaget efter en international konference i 1889). Man har så fået forelagt tidspunktet for de tilsvarende måneobservationer i Paris. Forskellen i tid disse to steder kan herefter omregnes til længdegrader på Jorden. (Vi kan iøvrigt henvise til opg.3 side 94.)

Pendulurene, man brugte til tidsbestemmelserne, var på daværende tidspunkt rimeligt nøjagtige, når man dagligt stillede dem efter Solen. Men de kunne ikke flyttes rundt. Specielt kunne de så ikke anvendes på havet. At udvikle et kronometer (et nøjagtigt skibsur) må have været en kompliceret opgave, for den blev først løst det meste af en levealder efter den blev stillet. Opgaven blev formuleret af et selskab i

Storbritanien: "Board of Longitude". Selskabet udlovede en præmiesum på 20,000 £ til opfinderen af et tilstrækkelig nøjagtigt kronometer. Det er en så væsentlig pengesum, at behovet for et sådant instrument må have været enormt. Opgaven blev stillet i 1714, altså i en periode, hvor handelskapitalismen er en væsentlig magtfaktor i visse af Vesteuropas samfund. For at opretholde og udbygge handelen med (eller udbytningen af, om man vil) kolonierne fordredes en storstillet søfart, hvortil der behøvedes kort, kompas og kronometer. Kompasset var allerede opfundet i det 13. århundrede.

Udover handelen er en anden faktor, der har indflydelse på søfarten, begyndt at spire. Det er industrialiseringen, hvortil der kræves et velfungerende transportnet - også ad søvejen. Det er vigtigt for kapitalejere, at varetransport forløber præcist og hurtigt, fordi det forøger profitstørrelsen. Det turde begrunde hvorfor et kronometer er en afgørende gevinst for den herskende del af befolkningen.

Det kan anekdotisk tilføjes, at opgavestillerne forsøgte at trække udbetalingen af præmien i langdrag. John Harrison blev manden, for hvem det lykkedes at fremstille uret. Han fremstillede i 1736 sit første iøvrigt ret nøjagtige kronometer, men først seks år efter sit femte urs tilblivelse, der blev afprøvet personligt af King George III, fik Harrison udbetalt pengene. Altså 40 år efter det første ur!

*

Med hensyn til bestemmelsen af breddegrader er historien en ganske anden. Her benyttedes at visse stjerner kan betragtes som stationære i forhold til Jorden. Det medfører, at horisontplanen til en fast breddebue danner en konstant vinkel med sigtelinjen til den betragtede fixstjerne (se fig. 7).

Nordstjernen N kan betragtes som en fixstjerne. Den er "beliggende" over Nordpolen. Horisontplanen H er vinkelret på jordradien CP, hvor P er et punkt på breddebuen, hvortil breddegraden ønskes bestemt. I P kan man med en kvadrant (se fig. 8) el. lign. bestemme vinklen φ mellem H-planen

✧ Nordstjernen

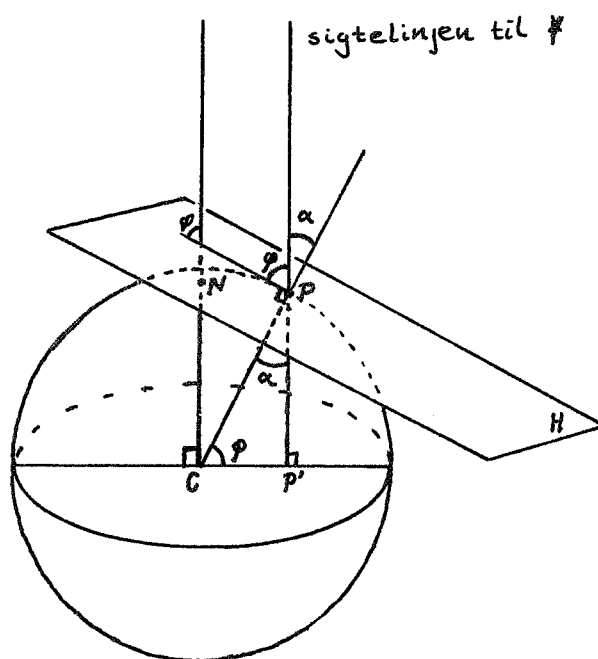


Fig. 7: Sættes $\angle CPP'$ lig med α ($\varphi + \alpha = 90^\circ$), ses ved brug af "sætningen" om topvinkler, at vinklen φ mellem sigtelinjen til Nordstjernen og horisontplanen H er breddegraden til P, dvs. $\angle PCP' = \varphi$.

og sigtelinjen til Nordstjernen. Og φ er netop breddegraden til P (fig. 7).

Denne metode har været kendt siden ca. 200 år fvt. altså allerede fra kartografiens første guldalder. Det skal bemærkes, at det ikke nødvendigvis behøver at være Nordstjernen, der ligger til grund for gradbestemmelsen. På den sydlige halvkugle må man under alle omstændigheder bruge en anden, f. eks. Sydstjernen.

*

Efter projektionsafsnittene berettes lidt om, hvorledes kartografiske metoder tager sig ud i moderne tid. Til at uddybe nogle af de ovennævnte problemstillinger er der forfattet

nogle opgaver, der er anbragt sidst i dette hæfte.

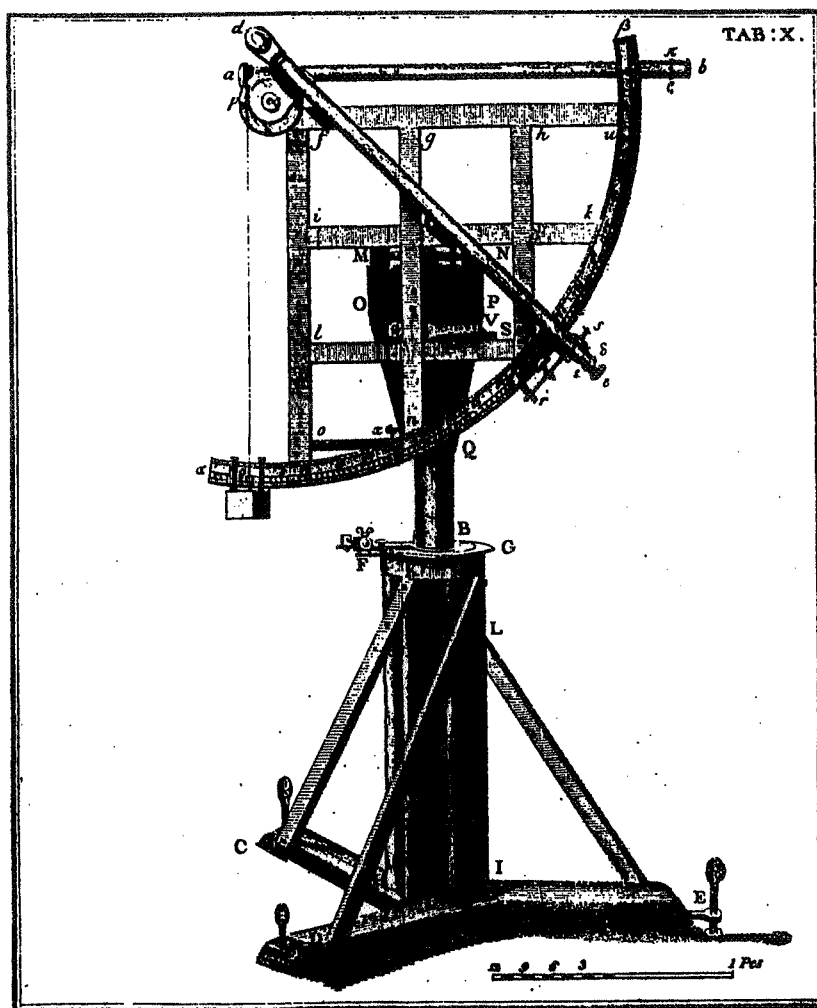


Fig. 8: Kvadranten som Thomas Bugge brugte til at bestemme Rundetårns breddegrad med. Kvadranten er taget fra Hvordan Danmarkskortet kom til at ligne Danmark, (1982), af K. Nielsen.

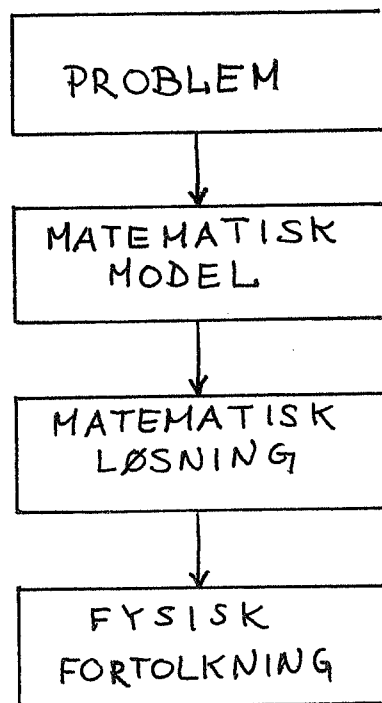
2. Kuglegeometri.

2.0. Lidt modelsnak.

Dette kapitels titel er kuglegeometri, og hæftets generelle tema er (jo) kortlægning af Jordoverfladen. Det er væsentligt her at bemærke, at en kugle er en idealisering af Jorden - den er som bekendt ikke en kugle. En sådan idealisering vil vi kalde en model: En kugle kan forstås som en model af Jorden, (viser det sig).

Ofte kan man støde ind i problemer, som er uoverskuelige at løse, hvis man ikke foretager visse idealiseringer af problemet, dvs. omsætter det fysiske problem til f. eks. en matematisk model. Problemets løsning(er) skal herefter søges ved at

Fig. 9:



arbejde med modellen. For at få det oprindelige fysiske problem "løst" kræves så, at de(n) eventuelle matematiske løsninger fortolkes og forstås i den givne fysiske ramme. Det er sjældent nemt at gennemføre de enkelte skridt tilfredsstillende eksakt. I vores problemstilling med at kortlægge Jorden forløber processen rimelig smertefrit. Vi vil senere vende tilbage til det med matematisk at modellere et fysisk problem

nemlig, når talen er om at "gøre en kugle flad". Men først drejer sagen sig om at kortlægge Jordens overflade, altså kuglen.

*

At kortlægge Jordens overflade indebærer etablering af et koordinatsystem, der gør det muligt at angive ethvert punkt på jordoverfladen med et koordinatsæt.

Vi ved, at Jorden tænkes inddelt i et "net" af længde- og breddebuer. Og det er netop deres indbyrdes placering, som muliggør en karakterisering af samtlige punkter på Jordens overflade. Hvorledes denne inddeling tager sig ud, og hvordan den anvendes til beregning af afstande og arealer på kugleoverfladen, er temaet for dette kapitel.

Vi vil altså antage, at Jorden har form som en kugle - det gør beregningerne langt mere medgørlige. At denne forudsætning også har sin berettigelse, vil blive belyst i slutningen af dette kapitel.

Et primært formål med foreliggende materiale er således at studere afbildninger af en kugleoverflade på en plan. Dertil skal vi forinden have undfanget nogle byggesten, som skal gøre disse afbildninger forståelige i en geometrisk ramme.

I geometrien undersøges matematiske genstandes indbyrdes forhold. De genstande, vi vil benytte, er punkter, linjer, planer og specielt kuglen.

De påstande vi fremsætter bliver ikke bevist i stringent matematisk forstand, men er principielt anskueliggjort ved intuitive resonnementer og figurer.

2.1 Vinkler og afstande.

Begreber som punkter, linjer og planer anser vi for værende velkendte. Dog vil vi indlede med et par bemærkninger om egenskaber ved linjer og planer i rummet.

Vi vil definere, hvad vi forstår ved vinklen mellem to linjer l og m i rummet. For at gøre dette må vi forudsætte $l \cap m \neq \emptyset$. Hvis l og m er sammenfaldende linjer, siger vi, at vinklen mellem l og m er nul. Skærer l og m hinanden i ét punkt, frembringer de en plan. Vi kan så lade m dreje om skæringspunktet i denne plan til l og m er sammenfaldende. Herved kan m under drejningen gennemløbe én af to vinkler. Den mindste af disse vinkler defineres som vinklen mellem l og m . (Fig. 10).

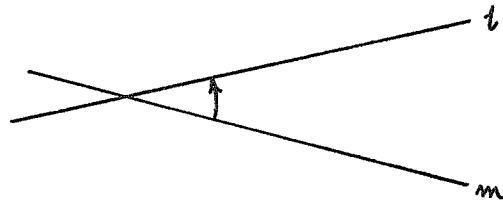


Fig. 10: Vinklen mellem to linjer l og m .

To planer i rummet vil enten være parallelle, skære hinanden i en linje eller være sammenfaldende. Hvis vi vil definere, hvad vinklen mellem to planer π_1 og π_2 er, må vi forlange, at $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Er π_1 og π_2 sammenfaldende siges vinklen $\angle(\pi_1, \pi_2)$ at være 0 (nul). Skærer de hinanden vil fællesmængden være en ret linje. Vi lader en tredje plan π_3 skære π_1 og π_2 således at $\pi_1 \perp \pi_3$ og $\pi_2 \perp \pi_3$. Sættes $l = \pi_1 \cap \pi_3$ og $m = \pi_2 \cap \pi_3$ defineres vinklen $\angle(\pi_1, \pi_2)$ mellem π_1 og π_2 som vinklen mellem l og m (fig. 11)

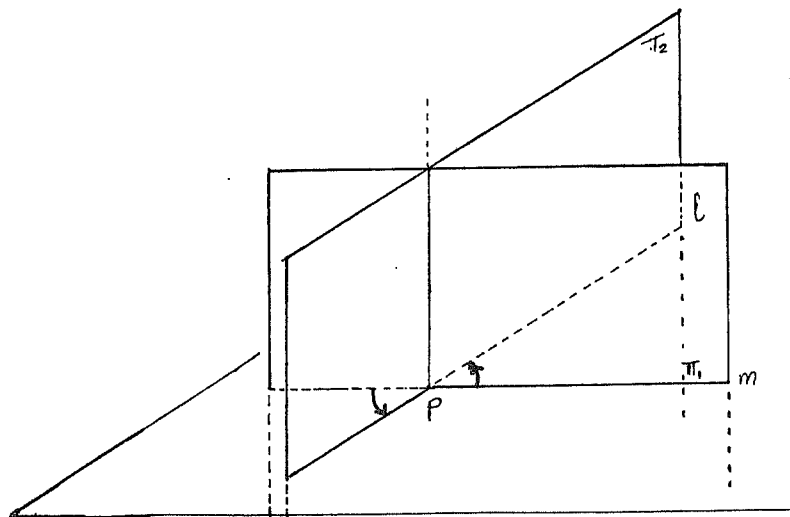


Fig. 11: Vinklen mellem to planer π_1 og π_2 .

Inden vi bevæger os over i geometrien på kugleoverfladen vil vi definere to afstandsfunktioner. Lad A og B være to punkter i rummet. Gennem A og B går netop én ret linje l . Vi siger så, at afstanden mellem A og B - kaldet $\text{dist}(A,B)$ - er længden målt langs l af linjestykket fra A til B eller fra B til A . Dette afstandsmål kaldes også den euklidiske afstand mellem A og B .

Det andet afstandsbegreb er knyttet til cirkelbuelængde. Lad A og B være to punkter beliggende på en cirkelperiferi. Vi kan så definere afstanden, $\text{dist}_k(A,B)$, mellem A og B som cirkelbuestykkelængden mellem A og B . (Fig. 12).

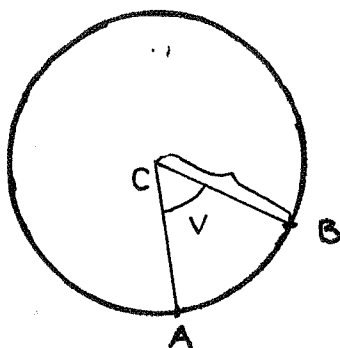


Fig. 12: Afstanden $\text{dist}_k(A,B)$ mellem to punkter A og B beliggende på en cirkelperiferi.

Hvis C er cirkelns centrum er $\text{dist}(C,A) = \text{dist}(C,B) = r$, hvor r er radius i cirklen. Kaldes vinklen ACB for v , har vi at $\text{dist}_k(A,B) = rv$.

Dette afstandsbegreb er indført, fordi det senere hyppigt vil blive brugt, idet afstande på en kugle (heraf indexet k i $\text{dist}_k(A,B)$) netop har denne form.

Eksempel. Vi betragter en cirkel med radius = 1 (enhedscirklen) og lader AB være en diameter. Da vil $\text{dist}(A,B) = 2$ og $\text{dist}_k(A,B) = \pi$.

2.2. Kugleoverfladens geometri.

Vi er nu i stand til at definere en kugleoverflade. En kugleoverflade er en punktmængde i rummet, hvis elementer til et

givet punkt C i rummet har den konstante, positive afstand $r \in \mathbb{R}_+$. Punktet C kaldes kuglens centrum og r kaldes kuglens radius. En kugleoverflade K kan således skrives som punktmængden: $K = \{P \mid \text{dist}(C, P) = r\}$, (fig. 14).

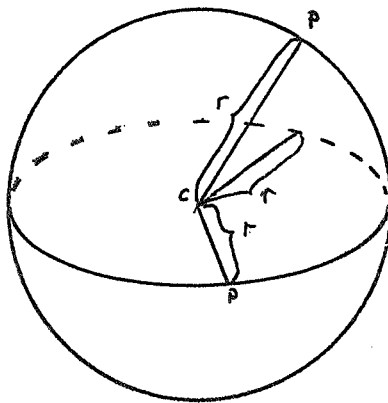


Fig. 13: En kugleoverflade bestående af punkter P med afstand $\text{dist}(C, P) = r$ fra det faste punkt C .

Man kan frembringe forskellige punktmængder på en kugleoverflade. Nogle af disse bliver her gjort til genstand for nærmere undersøgelse.

Anbringes en plan således, at den skærer eller blot rører en kugleoverflade er fællesmængden en cirkel beliggende i planen (fig. 14a og 14b) eller et punkt (fig. 14c), henholdsvis.

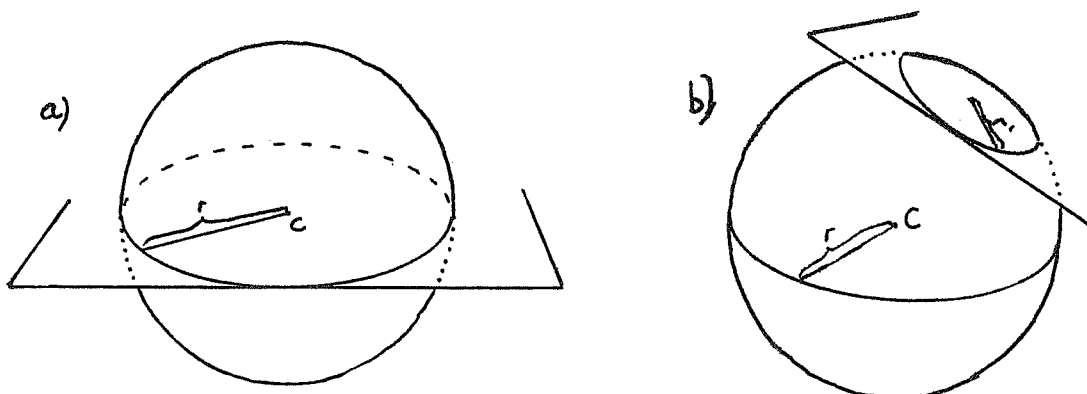
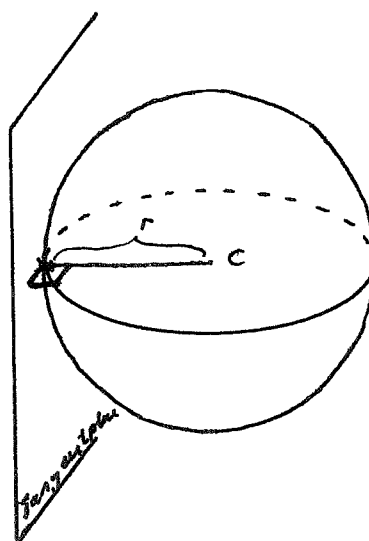


Fig. 14a: En storcirkel med radius lig r .

Fig. 14b: En lillecirkel med radius $r' < r$.

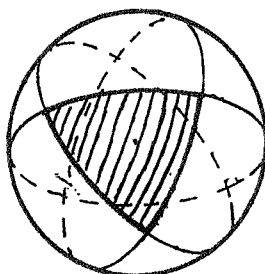
Fig. 14c: En plan skærer/rører
kugleoverfladen i eet
punkt.



Hvis ovennævnte plan samtidig indeholder kuglens centrum er fællesmængden en cirkel med samme radius og centrum som kuglen. En sådan cirkel benævnes en storcirkel (fig. 14a). Alle andre cirkler, der er dannet af punkter på kugleoverfladen, har en radius der er mindre end kuglens. Disse cirkler kaldes for lillecirkler (fig. 14b). En plan, som rører kugleoverfladen i ét punkt betegnes en tangentplan til kugleoverfladen.

Fra den almindelige plangeometri ved vi, at tre linjer, der alle skærer hinanden - dog ikke i det samme punkt - danner en trekant, hvis vinkelspidser er linjernes skæringspunkter. På kugleoverfladen kan vi opfatte det uendelig store antal storcirkler som "rette linjer"! Herved opnås, at tre "linjer", der er indbyrdes forskellige, danner en "trekant". En sådan vil vi kalde en sfærisk trekant (fig. 15).

Fig. 15: En sfærisk trekant.



Lader vi P være et punkt og π en plan, kan vi tale om, at P har en afstand til π . Linjen l vinkelret på π og indeholdende P vil skære π i et punkt $Q \in l$. Vi siger så, at afstanden $\text{dist}(P, \pi)$ mellem P og π er lig $\text{dist}(P, Q)$. Denne er nul, når og kun når $P = Q$!

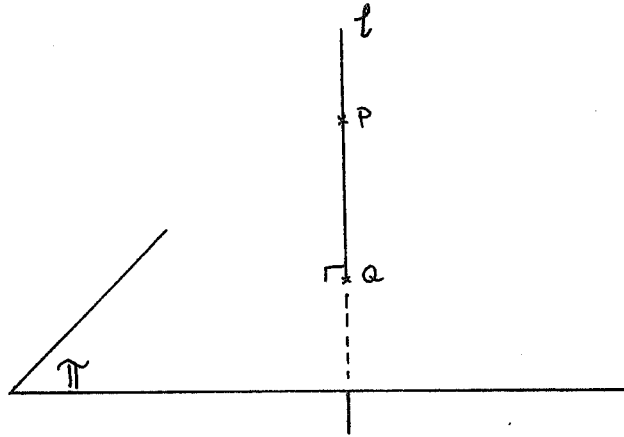


Fig. 16: Afstanden fra et punkt P til en plan.

En plan, hvis afstand til førømtalte kugles centrum C er mindre end r , deler kuglen i to dele, som hver kaldes en kuglekalot (fig. 14b).

To planer, der er parallelle, og hvis afstand til C hver er mindre end r , deler kuglen i to kalotter og (hvis planerne ikke er sammenfaldende) et kuglebælte (fig. 17).

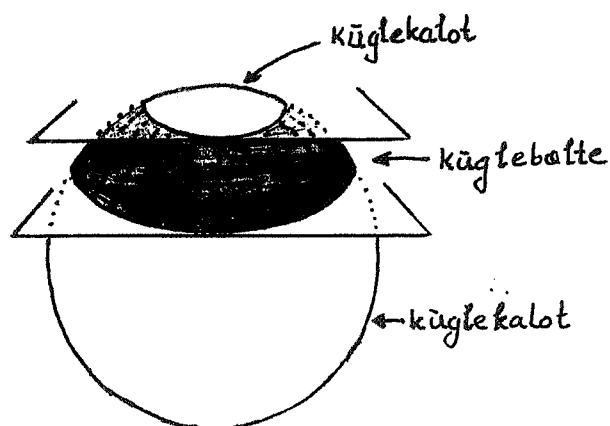


Fig. 17: Det skraverede og skyggede område angiver et kuglebælte.

Det kan ved brug af integralregning vises, at arealet af en

kuglekalot er $2\pi rh$, hvor h er afstanden mellem planen, der danner grundfladen i kalotten og tangentplanen parallel med denne plan (fig. 18). Heraf kan udledes, at kugleoverfladens totale areal A er lig med $4\pi r^2$, idet $h = 2r$.

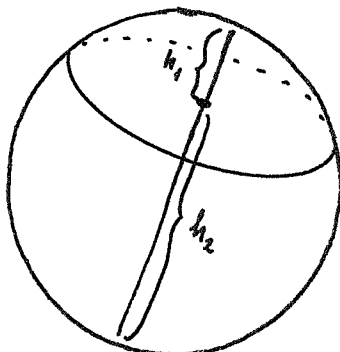


Fig. 18: Arealet af den øverste kalot er $2\pi rh_1$, og arealet af den nederste er $2\pi rh_2$. Kuglens overfladeareal er $2\pi r(h_1 + h_2) = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$.

Vi er så også i stand til at beregne arealet af et kuglebælte ved at betragte to forskellige kuglekalotter med arealer $A_1 = 2\pi rh_1$ og $A_2 = 2\pi rh_2$, hvor vi antager at $h_1 < h_2$ og dermed $A_1 < A_2$. Følgelig er det af disse kalotter frembragte kuglebæltets areal lig med $A_2 - A_1 = 2\pi r(h_2 - h_1)$ (fig. 19), hvor $0 < h_i < 2r$, $i = 1, 2$.

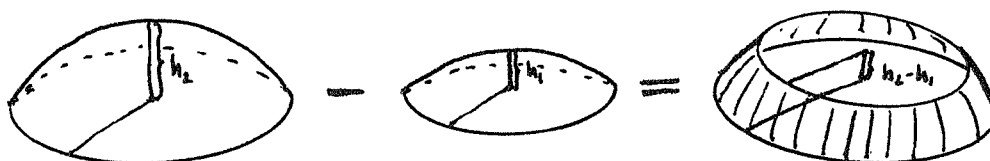


Fig. 19: Figuren viser metoden til bestemmelse af et kuglebæltets areal.

Vi betragter to punkter A og B, som på kugleoverfladen tænkes beliggende i hver sin ende af en kuglediameter. (A,B) defineres da som værende et par af diametralt modsatte punkter. Par af forskellige punkter på en kugleoverflade kan således tilhøre mængden af par af diametralt modsatte punkter eller mæng-

den af par af ikke-diametralt modsatte punkter.

Lad (A,B) være et element af sidstnævnte mængde, og lad C være centrum i den kugle K , på hvis overflade A og B ligger. Så vil linjen l gennem A og C sammen med linjen m gennem B og C frembringe én plan π . Da $C \in \pi$ vil $\pi \cap K$ være en storcirkel, og denne er således entydigt fastlagt af (A,B) (fig. 20a). Derimod vil det, hvis (A,B) er et par af diametralt modsatte punkter, være uendeligt mange forskellige storcirkler gennem A og B , thi der af linjen n gennem A , B og C kan frembringes uendeligt mange planer, hvis fællesmængde med K er storcirkler (fig. 20b).

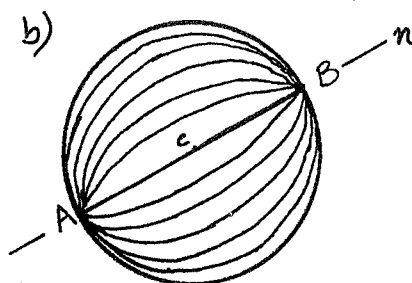
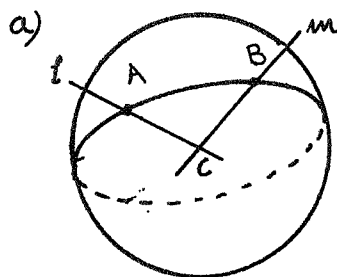


Fig. 20a: Et par af to ikke-diametralt modsatte punkter frembringer netop en storcirkel.

Fig. 20b: Et par af to diametralt modsatte punkter frembringer uendeligt mange storcirkler.

Idet en vilkårlig storcirkel entydigt frembringer en plan, siger vi, at vinklen mellem to storcirkler er vinklen mellem deres planer (fig. 21).

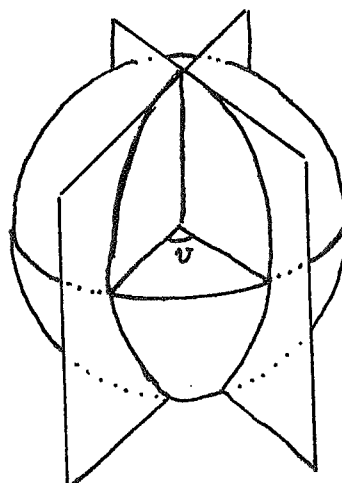


Fig. 21: Vinklen v mellem to storcirkler(s planer).

Vi går herefter over til at undersøge nogle beregningsmæssige sider af kuglegeometrien.

2.3. Sfæriske koordinater.

Vi ønsker nu at finde et talsæt, som angiver et vilkårligt punkt P på en kugleoverflade.

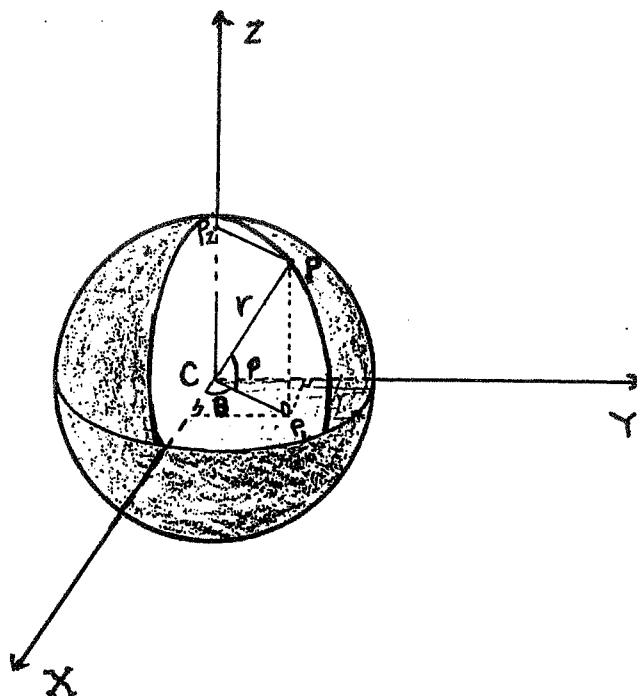


Fig. 22: Bestemmelse af koordinatsættet til P på kugleoverfladen.

Vi betragter en kugle med centrum C og radius r. Antag, at vi har anbragt et X-Y-Z koordinatsystem med begyndelsespunkt i C. Med betegnelserne fra fig. 22 finder vi følgende:
 P_2 vælges så PP_2 er parallel med X-Y-planen. Ved brug af lidt trigonometri ses, at

$$\sin \varphi = \frac{\text{dist}(C, P_2)}{r} \Rightarrow \text{dist}(C, P_2) = r \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi.$$

Ifølge fig. 23, som er et forstørret udsnit af fig. 22, er koordinaterne til P_1 således bestemt til $(r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta, r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, 0)$, hvor $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$.

Punktet P's tredje-koordinat er fastlagt af $\text{dist}(C, P_2) = r \cdot \sin \varphi$, med $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$.

På figurerne og i teksten har vi ladet φ og θ tilhøre inter-

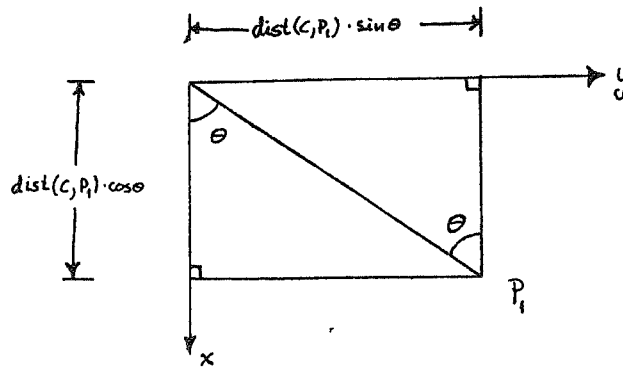


Fig. 23: Koordinatsæt til punktet P_1 .

vallet $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Resultatet er imidlertid sandt for alle valg af vinkler i forhold til koordinatsystemet. Altså kan vi tillade φ og θ at tilhøre hele mængden af reelle tal, $\mathbb{R}$. Dermed er koordinatsættet for et vilkårligt punkt $P = (x, y, z)$ på kugleoverfladen fastlagt ved udtrykket:

$$(x, y, z) = (r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta, r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \varphi).$$

Vi kalder talparret (φ, θ) for de sfæriske koordinater til P . Vi vil senere beskrive, hvordan de sfæriske koordinater hænger sammen med punkter på Jorden.

2.4. Sfærisk afstand.

Fra plangeometrien vides, at den korteste afstand mellem to punkter er langs den rette linje gennem disse punkter. Man kan vise, at den korteste afstand mellem to punkter på en kugleoverflade ligeledes er langs den rette linje gennem punkterne. Men den rette linje er her - som før nævnt - en storcirkel. Vi benævner denne afstand som den sfæriske afstand. Vi vil nu beregne den sfæriske afstand mellem to vilkårlige punkter A og B på en kugleoverflade. (Se fig. 24).

Vi forestiller os, at et koordinatsystem ligesom før er valgt, så dettes begyndelsespunkt er kuglens centrum C . Desuden er koordinatsystemet valgt så punktet A får de sfæriske koordinater $(0, 0)$, og punktet B koordinatsættet (φ, α) . Vi sætter kuglens radius lig med r og kalder vinkel ACB for x .

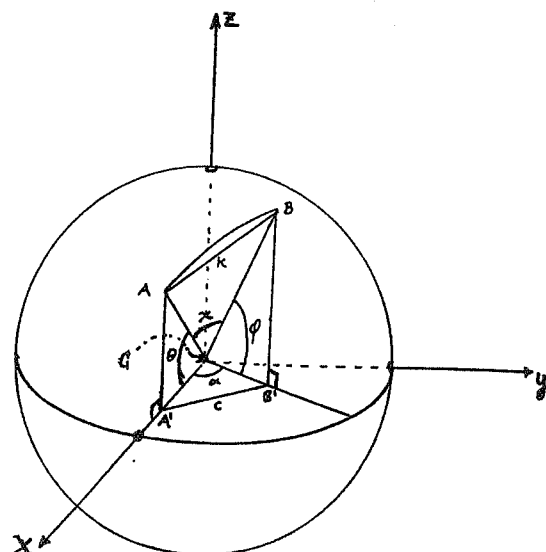


Fig. 24: Bestemmelse af den sfæriske afstand.

Da vi tillige har defineret afstandsfunktionen langs en cirkelbue, og da vi ønsker at bestemme storcirkelafstanden mellem A og B, må denne være givet ved $\text{dist}_k(A, B) = rx$. Vores ubekendte er altså x .

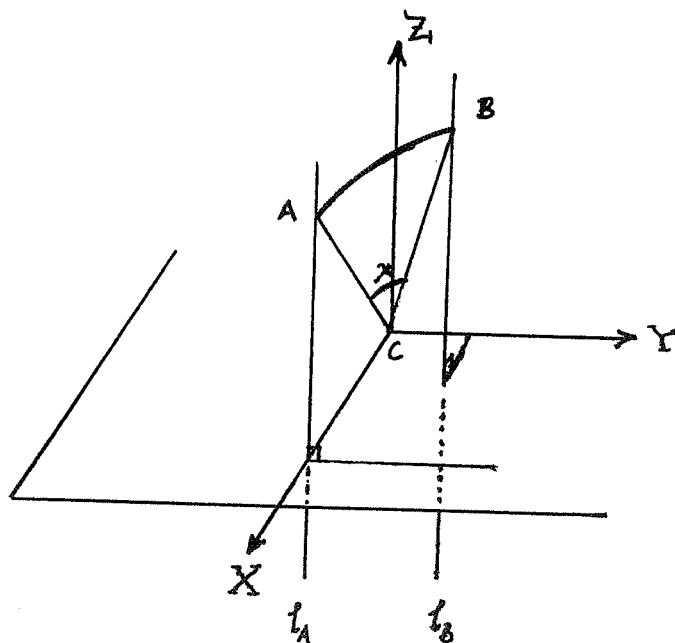


Fig. 25: En forstørrelse af visse dele af fig. 24.

Linjen l_A gennem A vinkelret på X-Y-planen skærer X-aksen. Dette skæringspunkt kaldes A' (fig. 25). Tilsvarende lader vi en linje l_B gennem B skære X-Y-planen under en ret vinkel i

et punkt B' . For at lette notationen kalder vi $\text{dist}(A', B')$ for c og $\text{dist}(A, B)$ for k . Endvidere lader vi en linje m gennem A parallel med $A'B'$ skære l_B i et punkt B'' . Det ses at $\text{dist}(A, B'')$ ligeledes er lig c .

Vi betragter så firkanten $AA'B'B$:

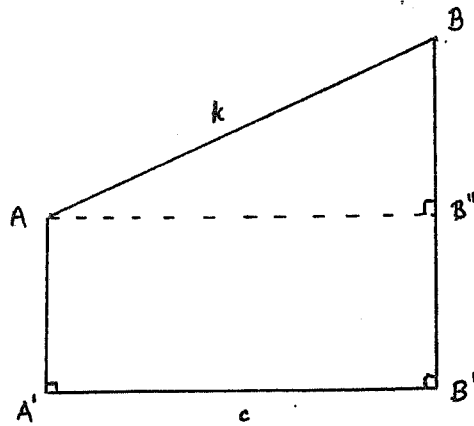


Fig. 26: Bestemmelse af $\text{dist}(A, B)$.

Anvender vi Pythagoras' læresætning om retvinklede trekanter på trekant ABB'' , finder vi, at

$$\begin{aligned} (1): k^2 &= c^2 + \text{dist}(B, B'')^2 \\ &= c^2 + (\text{dist}(B, B') - \text{dist}(B', B''))^2 \\ &= c^2 + (\text{dist}(B, B') - \text{dist}(A, A'))^2 \end{aligned}$$

Af fig. 24 fremgår, at

$$(2): \text{dist}(A, A') = r \cdot \sin \theta \text{ og } \text{dist}(B, B') = r \cdot \sin \phi.$$

(2) indsættes i (1), og vi får:

$$(3): k^2 = c^2 + r^2(\sin^2 \theta + \sin^2 \phi - 2 \sin \theta \sin \phi).$$

Da trekant $A'CB'$ er beliggende i X - Y -planen kan vi ved brug af cosinusrelationen i planen finde et udtryk for c , idet vi har, at

$$\begin{aligned} (4): c^2 &= \text{dist}(C, A')^2 + \text{dist}(C, B')^2 - \\ &\quad 2 \cdot \text{dist}(C, A') \cdot \text{dist}(C, B') \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Af fig. 24 indses, at

$$\begin{aligned}(5): \text{dist}(C, A') &= r \cdot \cos \theta \text{ og} \\ \text{dist}(C, B') &= r \cdot \cos \varphi.\end{aligned}$$

Ved at indsætte (5) i (4) fås:

$$\begin{aligned}(6): c^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi - 2 \cdot r \cdot \cos \theta \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \alpha \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \theta \cos \varphi \cos \alpha).\end{aligned}$$

(6) indsættes i udtrykket for k^2 , dvs. i (3):

$$\begin{aligned}(7): k^2 &= r^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \theta \cos \varphi \cos \alpha) + \\ &\quad r^2 (\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi - 2 \cdot \sin \theta \sin \varphi) \\ &= r^2 ((\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \\ &\quad 2(\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha + \sin \theta \sin \varphi)).\end{aligned}$$

Da det som bekendt for alle $v \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

kan vi reducere (7) til:

$$\begin{aligned}(8): k^2 &= r^2 (1 + 1 - 2(\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha + \sin \theta \sin \varphi)) \\ &= 2 \cdot r^2 (1 - (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha + \sin \theta \sin \varphi)).\end{aligned}$$

Vi ser så på trekant ACB. Denne er ligebenet, idet

$$(9): \text{dist}(C, A) = \text{dist}(C, B) = r.$$

Da vinkel ACB er x , får vi af cosinusrelationen, at

$$\begin{aligned}(10): k^2 &= \text{dist}(C, A)^2 + \text{dist}(C, B)^2 - \\ &\quad 2 \cdot \text{dist}(C, A) \cdot \text{dist}(C, B) \cdot \cos x \\ &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \cos x \\ &= 2 \cdot r^2 (1 - \cos x).\end{aligned}$$

Da $r > 0$ følger det af sætne "(8) = (10)", at

$$(11): \cos x = \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \alpha,$$

hvilket kaldes den sfæriske cosinusrelation. Formlen gælder for alle valg af vinkler θ , φ og κ , dvs. $\theta, \varphi, \kappa \in \mathbb{R}$.

Vi vender senere tilbage til, hvorledes vinklerne beregnes ud fra længde- og breddegradspositioner på Jorden.

2.5. Arealer.

I tilknytning til det foregående ser vi, at det lader sig gøre at beregne siderne i en vilkårlig "polygon" på kugleoverfladen, når man kender de relevante sfæriske koordinater. I plangeometrien medfører kendskabet til sider og nogle vinkler i en given polygon, at man relativt nemt kan beregne arealet af denne f. eks. ved opsplitning i trekanter. Dette er ikke tilsvarende overkommeligt på kugleoverfladen. I et senere afsnit reduceres problemet ved at betragte nogle "pæne" polygoner, nemlig "firkanter", hvor siderne er længde- og breddebuer.

2.6. Længde- og breddegradssystemet.

Vi har hidtil betragtet en kugle beliggende i et retvinklet koordinatsystem med en X-, en Y- og en Z-akse. Sådan betragter man sædvanligvis ikke Jorden.

Man tildeler som bekendt et punkt på Jordens overflade en breddegrad og en længdegrad. For at de foregående udregninger skal kunne bruges på baggrund af bredde-, længdegradsopgivelser, er det nødvendigt at oversætte bredde- og længdegraderne til sfæriske koordinater.

Vi kalder et sæt bestående af en breddegradsangivelse og en længdegradsangivelse for et geografisk koordinatsæt. I og med vi kalder det koordinatsæt, betyder det, at vi refererer til et bestemt koordinatsystem. Dette systems begyndelsespunkt er som tidligere Jordens centrum. Lader vi så Jordens rotationsakse, som går gennem den geografiske Nordpol og Sydpol, være systemets Z-akse, fastlægges X-Y-planen af ækvatorplanen.

I "praksis" findes ikke en X-akse og en Y-akse. Derimod angives positioner ud fra to specielle storcirklers beliggenhed. Den ene storcirkel er ækvator. Den anden er en storcirkel

gennem polerne og gennem observatoriet i Greenwich ved London.

Ækvators beliggenhed i forhold til den betragtede position bestemmer den såkaldte breddegrad, og "Greenwich-storcirkelbuen" beliggenhed i forhold til den betragtede position fastlægger positionens længdegrad.

2.7. Breddegrader.

Betragter vi et punkt P på Jordens overflade, danner halvlinjen fra centrum (Jordens og ækvators) gennem P en vinkel φ med ækvatorplanen. Breddegraden til P er så φ . Hvis vores "koordinatsystem" var orienteret, ville φ være positiv over planen og negativ under. Men vores koordinatsystem er ikke orienteret. Man angiver breddegraden med et efterfølgende N, hvis punktet ligger på den nordlige halvkugle og S på den sydlige. Ækvator selv har overalt breddegraden 0° .

Med denne definition får Nord- og Sydpolen breddegraderne 90°N og 90°S henholdsvis.

En breddecirkel er herved cirklen bestående af punkter, der alle har samme breddegrad. En breddecirkel er således - med undtagelse af ækvator - en lillecirkel.

2.8. Længdegrader.

Andenkoordinaten i det geografiske koordinatsæt refererer til et punkts beliggenhed i forhold til storcirklen gennem Greenwich og polerne. Man definerer storcirkelbuen fra Nordpolen gennem Greenwich til Sydpolen til at have længdegraden 0° . Mængden af par af diametralt modsatte punkter til denne storcirkelbue tillægges længdegraden 180° og kaldes for datolinjen.

Hvis vi betragter et punkt P på jordoverfladen, bestemmer P sammen med polerne en storcirkel. Denne storcirkel danner en vinkel α med "Greenwich-storcirkelbuen". Ligger P i østlig retning i forhold til Greenwich, efterfølges vinkelangivelsen med Ø, og hvis P ligger i vestlig retning med V.

Med denne definition antager α værdier i intervallet fra 0°

til 180° i østlig eller vestlig retning.

2.9. Positionsangivelse på Jorden.

Positionen til et punkt på Jorden angives altså ved to geografiske koordinater: En breddegrad φ og en længdegrad α . Vi vil nu undersøge forholdet mellem disse koordinater og de tidligere definerede sfæriske koordinater, der således ikke må forveksles med hverandre.

Lad (ψ, β) være det sfæriske koordinatsæt til et punkt P med det geografiske koordinatsæt (φ, α) . Ifølge de nye betragtninger har vi, at enten

$$0^\circ \leq \varphi_N \leq 90^\circ N$$

eller

$$0^\circ \leq \varphi_S \leq 90^\circ S.$$

Og enten

$$0^\circ \leq \alpha_O \leq 180^\circ O$$

eller

$$0^\circ \leq \alpha_V \leq 180^\circ V.$$

Vi kan så lade $\psi \in [-90^\circ, 90^\circ]$ (eller $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ målt i radianer), hvor vi sætter $\psi = -90^\circ$ til at være $90^\circ S$ (Sydpolen). Altså, Vi vedtager, at sydlige breddegrader φ_S oversættes til den sfæriske 1. koordinat $\psi = -\varphi$. For nordlige breddegradspositioner φ_N bliver den sfæriske 1. koordinat $\psi = \varphi$.

Med længdegraderne er forholdet lidt anderledes. Vi kan lade $\beta \in [-180^\circ, 180^\circ]$ (svarende til $[-\pi, \pi]$ i radianer). De negative vinkler definerer vi som α_V , altså de vestlige længdegradsangivelser, og for $\beta \in [0^\circ, 180^\circ]$ svarer det til at lade α gennemløbe længdegraderne der fastlægger den østlige halvkugle. Det skal understreges, at disse sager er vedtagelser og IKKE entydigheder.

I mange tilfælde er en heltallig gradangivelse ikke tilstrækkelig nøjagtig. Derfor vil man støde på angivelser som f. eks. $17^\circ 42' 38'' V$, $66^\circ 12' 51'' S$. Dette læses: 17 grader 42 minutter 38 sekunder vestlig længde og 66 grader 12 minutter 51 sekunder sydlig bredde. Minut-sekundangivelsen er ikke baseret på 10-talssystemet, men på 60-talssystemet.

Skal positionen derfor transformeres til sædvanlige decimaltal sker det på følgende facon:

$$17^{\circ}42'38''V \sim 17^{\circ} + \frac{42}{60} + \frac{38}{3600}V = 17.7106^{\circ}V.$$

$$66^{\circ}12'51''S \sim 66^{\circ} + \frac{12}{60} + \frac{51}{3600}S = 66.2142^{\circ}S.$$

2.10. Afstandsberegning.

Vi skulle nu være i stand til at beregne afstanden mellem to vilkårlige punkter på Jorden, ved at benytte den sfæriske cosinusrelation.

Eksempel. Vi vil beregne afstanden mellem København og Samoaøerne i Stillehavet.

Idet København har positionen $55^{\circ}42'N$, $12^{\circ}35'Ø$ og Samoaøerne har positionen $14^{\circ}S$, $171^{\circ}V$ kan vi finde vinklen α mellem længdebuerne gennem disse steder ved

$$\begin{aligned}\alpha &= (360^{\circ} - 171^{\circ}) - 12^{\circ}35' \\ &= 189^{\circ} - 12^{\circ}35' \\ &= 176^{\circ}25';\end{aligned}$$

hvilket - skrevet på decimalform bliver 176.42° . Bemærk at α altid er mindre end eller lig 180° - "vi går den korteste vej" - og af $12^{\circ}35' - (-171^{\circ}) = 183^{\circ}35'$ følger, at $\alpha = 360^{\circ} - 183^{\circ}35' = 176^{\circ}25'$.

Vi sætter så $\varphi = 55^{\circ}42'$ svarende til 55.7° og $\theta = -14^{\circ}$. Vi finder da ved indsættelse i cosinusrelationen, at

$$\begin{aligned}\cos x &= \sin(55.7^{\circ})\sin(-14^{\circ}) + \cos(-14^{\circ})\cos(55.7^{\circ})\cos(176.42^{\circ}) \\ &\approx -0.1999 - 0.5457 \\ &\approx -0.7456.\end{aligned}$$

Heraf bestemmes x til 138.21° eller omregnet til radianer $x = 2.412$. Er Jordens radius opgivet til $R = 6,371\text{km}$, findes den søgte afstand til

$$\begin{aligned}R \cdot x &= 6,371\text{km} \cdot 2.412 \\ &= 15,369\text{km}\end{aligned}$$

2.11. Arealbestemmelse.

Vi vil nu betragte en del af et kuglebælte og undersøge, hvorledes arealet af et sådant kan beregnes. Det er overkommeligt at gøre det, når vi indskrænker os til at lade kuglebælte udsnittet være begrænset af længdebuer og breddebuer.

Lad A, B, C og D være "hjørner" i det betragtede område. Lad så punkterne A og B have den sfæriske 1.-koordinat φ og punkterne C og D den sfæriske 1.-koordinat θ . Endvidere sættes længdegradsforskellen mellem længdebuestykkerne AC og BC til α (fig. 27).

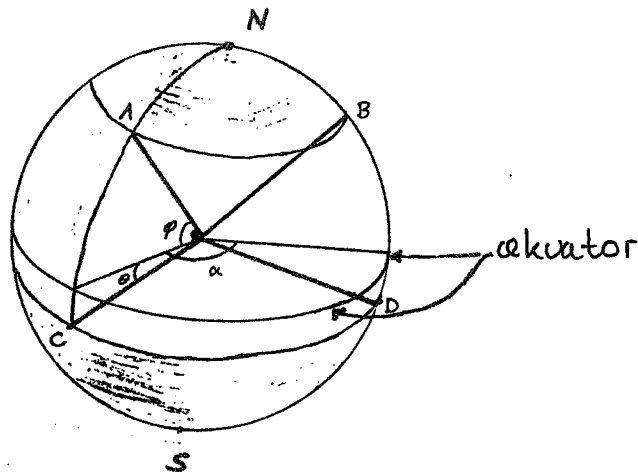


Fig. 27: Punkterne A og B har breddegraden φ , mens C og D har breddegraden θ , (A,C) er ligesom (B,D) par af ikke-diametralt modsatte punkter og danner derfor entydigt storcirkelbuer, mellem hvis planer vinklen sættes til α .

Er A og B beliggende på den nordlige halvkugle regnes φ positiv og φ er negativ, hvis punkterne ligger på den sydlige halvkugle, hvilket er i overensstemmelse med det foregående udledte.

Fra side 23 vides, at arealet af en kuglekalot er $2\pi rh$, hvor h her er afstanden fra Nordpolen til breddecirkelplanen, der afgrænser kalotten nedadtil. Da det betragtede område kan ses som et udsnit af forskellen mellem to kuglekalotter, kan vi udtrykke arealet $Ar(ABCD)$ af området ved

$$Ar(ABCD) = r\alpha(h_2 - h_1),$$

hvor $h_2 = r - r \cdot \sin \theta$ og $h_1 = r - r \cdot \sin \varphi$, idet vi lader $h_2 > h_1$.

Vi får hermed, at

$$\begin{aligned} \text{Ar}(ABCD) &= r\alpha(r - r \cdot \sin \theta - (r - r \sin \varphi)) \\ &= r^2\alpha(\sin \varphi - \sin \theta). \end{aligned}$$

Det er altså muligt ud fra kendskab til arealberegninger af kuglekalotter at beregne arealet af et kuglebælteudsnit, når dette er afgrænset af længde- og breddebuer. Men hvad nu, hvis vi skulle bestemme arealet af et vilkårligt landområde, der ikke har denne afgrænsning? Ja, så kan man splitte landområdet op i mindre områder, der netop har nævnte afgrænsning. Så beregnes arealet af hver af de mindre områder, hvorefter disse arealer adderes. Summen er da tilnærmelsesvist landområdets areal.

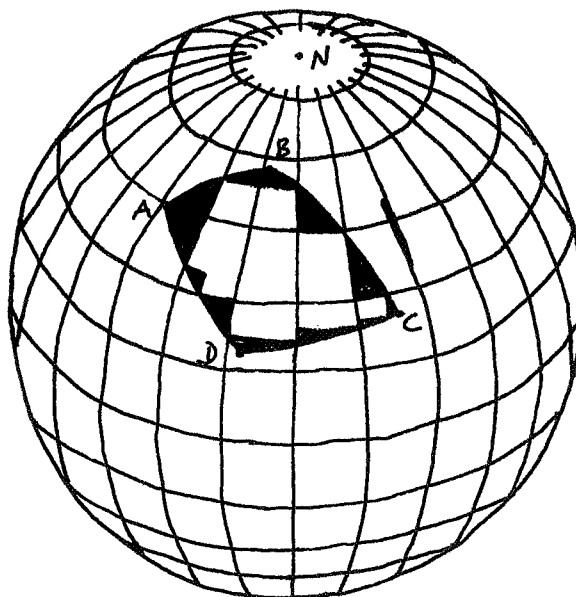


Fig. 28: Det mørkt markerede område skal fininddeles i længde-breddebuer, før det samlede areal af ABCD kan beregnes.

2.12. Jordens form.

Samtlige af de foregående betragtninger af Jorden bygger på forudsætninger om, at Jorden har form som en kugle. Det er imidlertid mere korrekt at beskrive Jordens form som en fladtrykt omdrejningsellipsoide. Nedenstående figur illustrerer

et lodret snit gennem Nordpolen dvs. et tværsnit af Jorden. Figuren er stærkt overdrevet m.h.t. Jordens form, men antyder hvordan vinklen mellem horisontplanen og sigteplanen til Nordstjernen ændres (fig. 29).

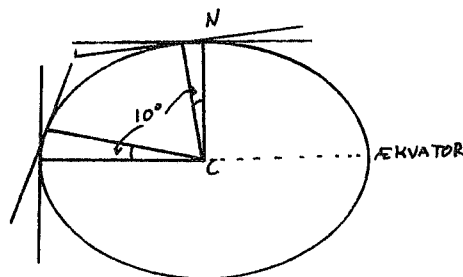


Fig. 29: En grov antydning af, hvorledes Jorden krummer. Vinklen mellem tangenterne ved ækvator er større end den tilsvarende ved en af polerne.

Breddegraden ændres fra 0° ved ækvator til 90° ved Nordpolen. Hastigheden hvormed denne vinkel ændrer sig er ikke konstant, men ændres hurtigere i et område nær ækvator end i et nær Nordpolen. Hvor stor ændringen er, kommer til udtryk i at en længdebue på 1° ved Nordpolen (og Sydpolen) er 111.69km og et tilsvarende længdebuestykke på 1° ved ækvator har længden 110.60km. Endvidere er radius i den storcirkel, som beskriver ækvator, lig 6,378.160km. Radius i den "storcirkel" - som altså er en fladtrykt ellipse - der indeholder polerne, er 6,356.912km. Sidstnævnte er iøvrigt ikke en radius, men den halve lilleakse i "ellipsen".

Disse tal viser, hvor lille fladtrykningen egentlig er. Derfor vil vi også i det følgende antage, at Jorden har form som en kugle, hvorved både længde- og breddebuerne betragtes som perfekte cirkler. Vores valgte beskrivelsesmodel af Jorden virker altså rimelig akseptabel.

3. Kortprojektioner.

3.0. Indledning.

Ofte får man brug for flade kort over områder af Jordens overflade. Det kan da være rart at vide, hvilke egenskaber det pågældende kort har. De egenskaber vi skal beskæftige os med er, om et kort er afstandsbevarende langs visse retninger, arealtro og/eller vinkelbevarende.

Man kan naturligvis lade sig nøje med at vide, hvilke af de nævnte egenskaber et kort besidder. Men det kan også være af værdi at have en fornemmelse af, hvordan kort over større eller mindre områder fremstilles. Det er dette, vi her vil beskrive, navnlig ud fra et matematisk synspunkt. Herved bliver opgaven at afbilde en rumlig figur på en plan. Dette volder imidlertid visse problemer. Matematikeren F.C. Gauss (1777-1855) har nemlig - med matematiske metoder - vist, at det er umuligt at konstruere en afbildning, der har alle de ovennævnte egenskaber, af en lukket flade, som f. eks. en kugleflade eller en ellipsoide på en plan. I forhold til kartografiens historie er det bemærkelsesværdigt sent, at denne kendsgerning fastslås. Det hænger sammen med, at forudsætningerne - den analytiske geometri dvs. geometri med koordinatsystemer - først for alvor ser dagens lys i det 17. - 18. århundrede.

Man kan tale om, at rumlige figurer er udfoldelige. Det skal forstås sådan, at flader - idet de tænkes bestå af papir - kan klippes op og derefter udfoldes til en plan figur. Dette kan altså ikke lade sig udføre med en kugleskal, men f. eks. kan det gøres med en terning. Omvendt kan man heller ikke folde et ark papir om en kugle, uden at papiret bliver krøllet.

Fotografering kan opfattes som en afbildning af rumlige genstande på en plan - den fotografiske plade. Ligesom man kan fotografere personer og genstande i forskellige afstande og vinkler afhængig af, hvad man ønsker at fremhæve, kan man også afbilde Jorden på mange måder afhængig af, hvilke egenskaber man ønsker kortet skal have. Ved at kigge i et atlas vil man da også kunne se, at der er anvendt forskellige måder at re-

præsentere Jorden - eller dele deraf. Som regel er der skrevet et navn eller begreb i et hjørne af kortet. Det henviser til måden, kortet er fremstillet på. På nogle kort er længde- og breddebuerne afbildet som rette linjer, på andre som krumme kurver. På atter andre kan længdebuerne være repræsenteret af rette linjer samtidig med, at breddebuernes repræsentation er krumme kurver - eller omvendt.

Fælles for alle anvendte repræsentationer af Jorden er, at de ikke er af samme størrelse som Jorden. Et kort over et område er som bekendt væsentlig mindre end selve området. Enhver afbildning af områder på Jorden er i virkeligheden foretaget ud fra en nedskaleret udgave af Jorden: En globus. Det er et udtryk for denne nedskalering, som er indeholdt i et målestoksforhold, der altid er angivet på et kort. Et målestoksforhold er i reglen angivet som f. eks. 1:2,000,000. Det kan betyde to ting: Enten betyder det, at 1 cm på kortet svarer til 2 millioner cm på Jorden - dvs. 20 km. Eller det kan betyde, at radius r i den globe, der er brugt til kortafbildningen, er 2 millioner gange mindre end Jordens radius R , dvs. $R/r = 2,000,000$. Hvilken en af betydningerne, der er tale om i et konkret tilfælde, er svært at afgøre. Men hvis det er forholdsvis lille område af Jorden der er afbildet, altså hvor krumningen er af mindre betydning, er det sandsynligvis den første betydning, der er brugt. Den anden bruges ofte ved afbildninger af større områder af Jorden.

Selvom man ikke kan konstruere et korrekt kort af Jorden, kan man alligevel vælge afbildningsmetoder, der bibeholder visse egenskaber men altså ikke alle! Egenskaberne kan bestå i at bevare arealer, bevare visse afstande eller bevarelse af vinkler mellem retninger. Man kan også fremstille kort, hvis væsentligste egenskab udelukkende består i, at områder skal ligge de tilsvarende på globen. Disse kort bevarer så ingen af de førnævnte egenskaber. Men "bevarelse" af former kan kun opnås tilnærmelsesvis, og det endda kun for forholdsvis små områder af globen. Dette er klart, fordi kortet ellers ville være resultatet af en "korrekt" afbildning!

Når vi senere beregner arealer af områder på globen i forhold

til tilsvarende områder på et kort, "arealforholdet", har vi begrænset os til at se på områder afgrænset af længde- og breddebuer. Dermed er de betragtede områder en slags "rektangler". Man kan indse, at man tilnærmelsesvist kan bestemme arealet af et vilkårligt område, når blot man opdeler det i små "rektangler" af nævnte type. Hvis arealforholdet bestemt af et vilkårligt område antager værdien 1, kaldes afbildningen arealbevarende eller arealtro. Arealbevarende kort er meget anvendelige, hvis man ønsker at sammenligne befolknings-tætheder, nedbørsforhold, fordeling af varer osv.

Ved vinklen mellem to buer i et punkt på globen forstår vi vinklen mellem tangenterne til buerne i det betragtede punkt. Bevares sådanne vinkler ved en afbildning af globen, kaldes afbildningen naturligt for vinkeltro eller vinkelbevarende. Kort, der har denne egenskab kan være velegnede til navigering, idet kompasser (dvs. en retning, der danner samme vinkel med samtlige længdebuer på Jorden) ved nogle kort afbildes i rette linjer.

Globen er den eneste repræsentation af Jorden, der har bevaret afstande i alle retninger under hensyntagen til målestoksforholdet. Men nogle kort kan godt have bevaret afstande langs disse retninger.

Der findes et væld af metoder til fremstilling af globen på en plan. Disse metoder har fællestræk, som vi i begrænset omfang vil opridse her:

Vi forestiller os en gennemsigtig kugleskal, hvorpå nogle længde- og breddecirkler er aftegnet, således at kugleoverfladen er markeret som et grovmasket net. Derudover forestiller vi os en flade, der kan udfoldes til en plan, og en lyskilde, der er placeret sådan, at lysstrålerne afbilder kugleskallens netmasker på fladen.

En sådan afbildning vil vi kalde en ægte geometrisk projek-tion. En projektion i denne forstand fremkommer således ved at afbilde en rumlig figur på en udfoldelig flade, ved at forestille sig rette linjer trukket fra et såkaldt sigtepunkt (lyskildepunktet) gennem figurens punkter til skæring med

billedfladen. Disse skæringspunkter kaldes projektionens billedpunkter.

Sigtepunktets og billedfladens indbyrdes placering og billedfladens form er bestemmende for projektionens udseende. De tre mest grundlæggende projektionstyper er a) planprojektioner, b) cylinderprojektioner og c) kegleprojektioner (fig. 30).

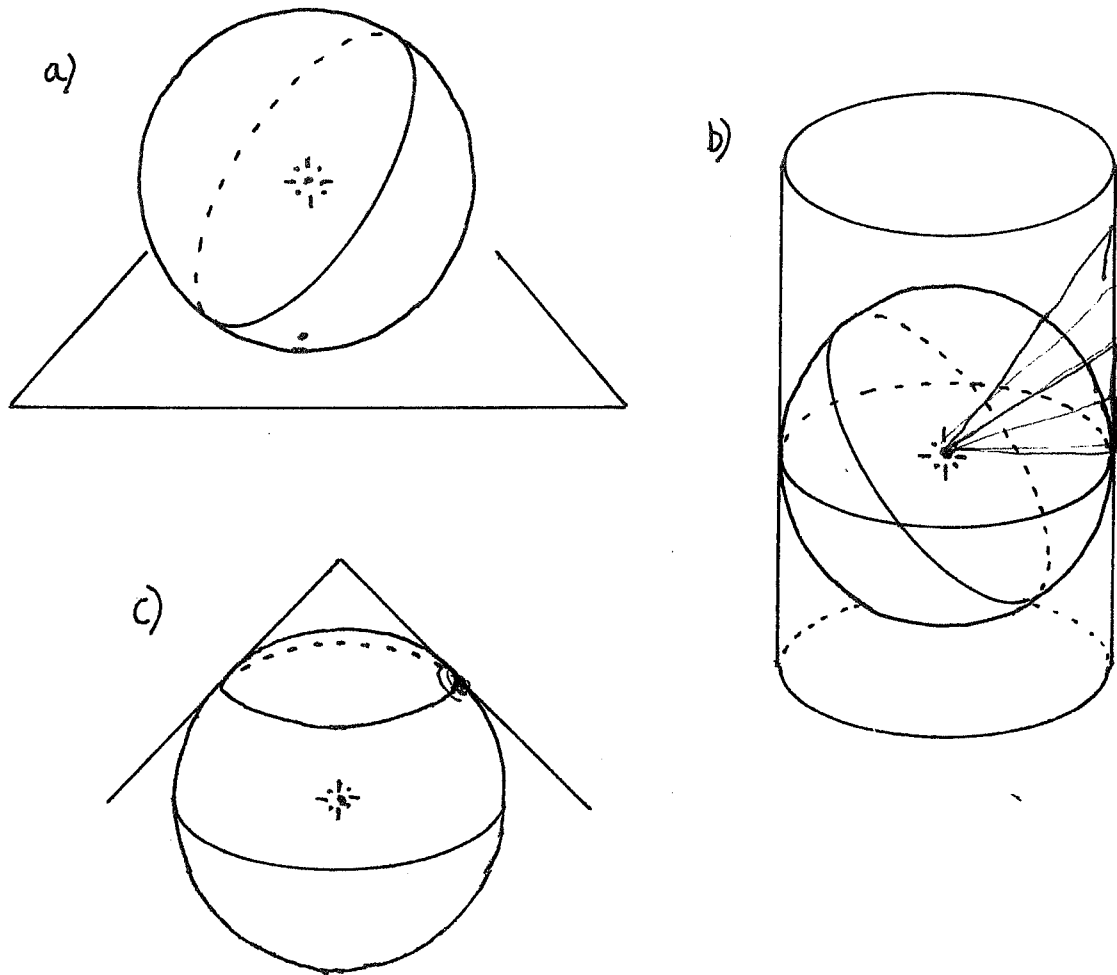


Fig. 30: a), b) og c) antyder, hvordan henholdsvis en plan-, en cylinder- og en kegleprojektion kan etableres.

Ved planprojektioner er billedfladen en plan, der har eet røringspunkt med globen. Ved cylinder- og kegleprojektioner er billedfladen henholdsvis en cylinder og en kegle, der for cylinderens vedkommende tangerer globen i en storcirkel. Keglen tangerer derimod globen i en lillecirkel. Når cylinderen og keglen tænkes klippet op og udfoldet, fremkommer det plane kort.

I praksis er det imidlertid kun få kort, der er fremstillet direkte ud fra en ægte (geometrisk) projektion. De fleste kort er dog oprindelig baseret på en sådan, men er viderebearbejdet ved brug af matematiske modifikationer. Alligevel tillader vi os at kalde alle afbildninger af globen på en flade for projektioner, hvorved vi har udvidet begrebets betydning.

Det er iøvrigt ikke almindeligt at udføre projektionerne ved først at folde en kegle eller cylinder. Oftest udføres afbildninger direkte til kortplanen gennem brug af matematiske funktioner. Til ethvert punkt (φ, α) på globen svarer nemlig et punkt (x, y) på kortet. Formelt kan dette illustreres således:

$$x = f(\varphi, \alpha)$$

$$y = g(\varphi, \alpha)$$

hvor φ og α henholdsvis er bredde- og længdegrader. Funktionerne f og g skal fastlægges så x og y bliver entydigt bestemte, dvs f og g er injektive. Men ved kun at arbejde med projektionerne på denne måde, får man ikke den samme geometriske forståelse af forholdene.

Når man vil fremstille kort, er der flere måder at gribe sagen an på. F. eks. kan man, som landmålere, foretage opmålinger af begrænsede områder og indtegne resultaterne på papir. Denne metode er naturlig, når byer eller lignende skal afbildes på større kort. En anden metode - og det er den vi vil bruge i de til teksten knyttede konstruktionsopgaver - går ud på at fremstille et længde-breddebuenet på papir, og derefter bruge tabeller over positioner forskellige steder på Jorden og indtegne disse. Sådanne positioner er bestemt ud fra astronomiske observationer.

3.1. Mere modelsnak.

Det er altså givet, at en kugle ikke kan udfoldes. Det er desuden nødvendigt at have flade repræsentationer af en kugles overflade - det vil her sige flade kort over Jorden - thi man kan f. eks. ikke anvende en passer på en globus eller på runde genstande iøvrigt.

plan = billedplanen. Sigtepunktet tænkes anbragt uendelig langt væk fra globen. Oversat betyder det, at projektionslinjerne, der jo udgår fra sigtepunktet, antages at være parallelle. I praksis vil man naturligvis ikke opfatte sigtepunktet som en uendelig fjern genstand, men man vil tænke på projektionen som en mængde af parallelle linjer.

Det er åbenbart at den orthografiske projektion netop afbilder den halve globus, hvor randen af projektionens billede bliver billedet af en storcirkel (ækvator, hvis en af polerne er røringsspunktet mellem globe og billedplan).

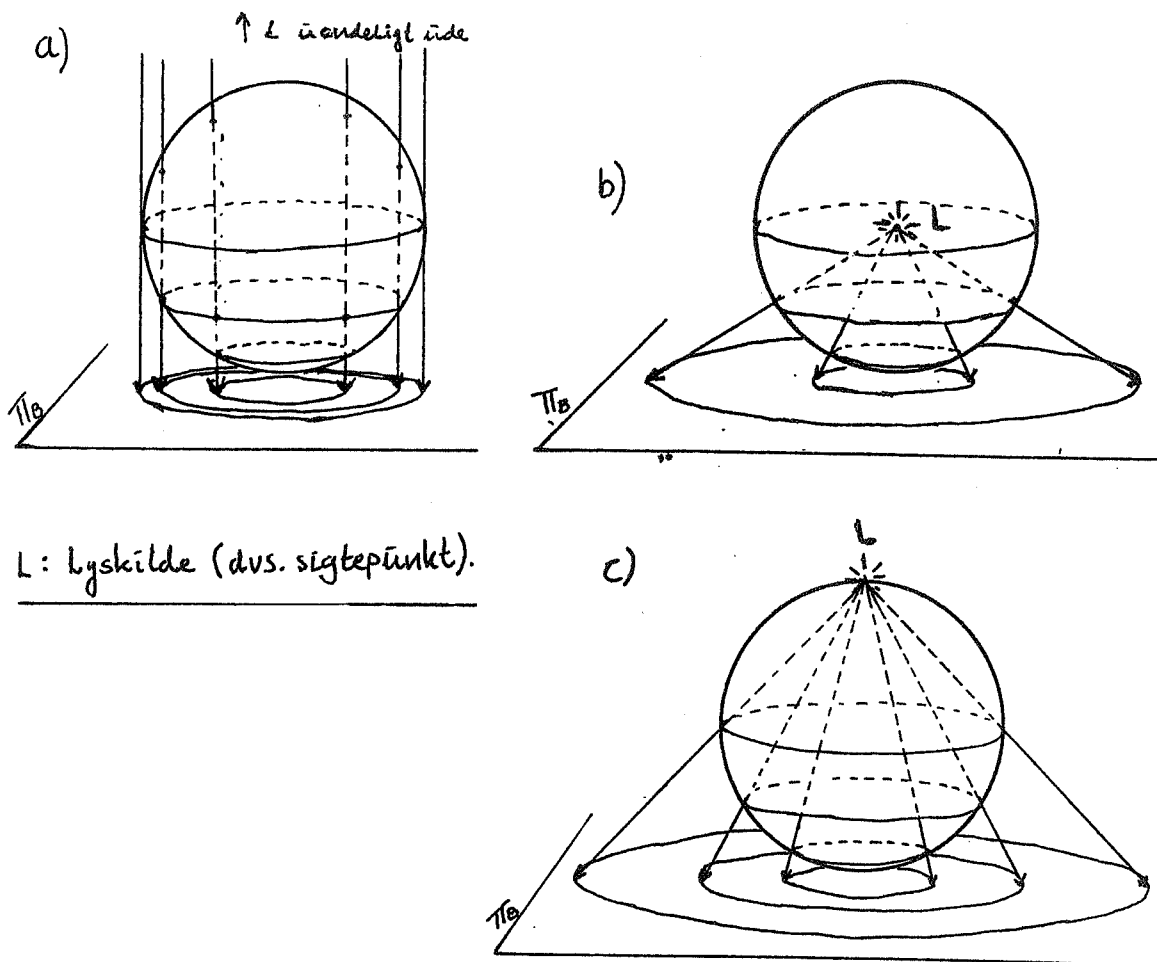


Fig. 31: a) er en orthografisk projektion. b) er en gnomonisk projektion og c) er en stereografisk projektion.

Fig. 31 b) viser en centralprojektion, hvormed det antydes, at sigtepunktet ligger i globens centrum. Projektionen kaldes også gnomonisk. (En gnomon er et gammelt solur, der angiver sol-

højde og klokkeslet. Et solur består f. eks. af en pind, som stikkes lodret i jorden, hvorved dens retning er identisk med en jordradius.)

Det ses, at denne projektion teoretisk set "kun" kan afbilde en halvkugle - og det endda kun næsten: Lader vi nemlig en plan π gennem centrum skære globen med radius r således, at π er parallel med billedplanen π_B , da vil fællesmængden mellem globen og π være en storcirkel, der ikke afbildes, da ethvert punkt på storcirklen vil afbildes af en entydigt fastlagt halvlinje l med endepunkt i sigtepunktet L , og denne halvlinje vil ikke skære π_B , idet $l \in \pi$ og $\pi \parallel \pi_B$ (fig. 32).

Med en tilsvarende argumentation kan vises, at punkter P på kuglen med $\text{dist}(P, \pi_B) > r$ heller ikke bliver afbildet.

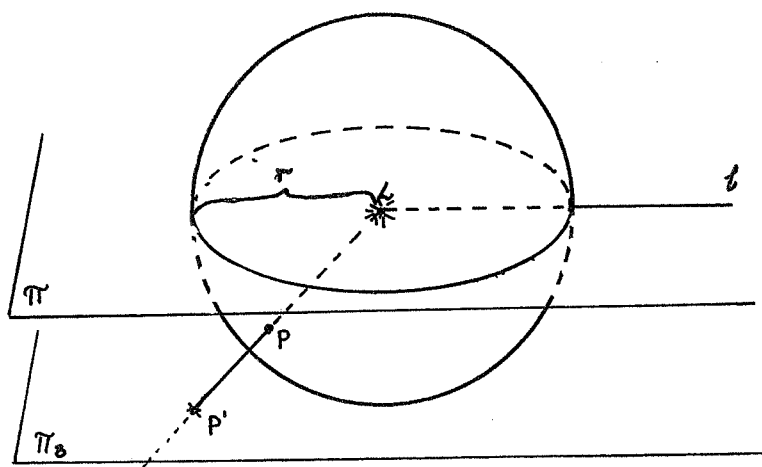


Fig. 32: Storcirklen (evt. ækvator) beliggende i π bliver ikke afbildet på π_B .

I praksis kan man ikke arbejde med kort, der har udstrækning som en matematisk plan. Derfor vil det kun blive aktuelt at afbilde punkter P på globen, hvor $\text{dist}(P, \pi_B)$ er omtrent den halve eller kvarte globeradius r .

En lignende projektionstype fås ved at flytte sigtepunktet L fra globens centrum til et kugleoverfladepunkt sådan, at L og billedplanens røringspunkt bliver diametralt modsatte punkter. Denne type kaldes stereografisk projektion. (Fig. 31 c). Med den stereografiske projektion kan afbildes et større område end ved den gnomoniske. Vi kan se, at hele globen

med undtagelse af sigtepunktet selv - teoretisk set - kan afbildes. Ligesom før vil der i praksis foretages restriktioner. Vi vil ikke gå i dybden med denne projektion, bl.a. fordi den minder en del om den gnomoniske, som dog er mere enkel at konstruere.

Som det fremgår af overskriften kaldes planprojektioner også for azimuthalprojektioner. Ordet azimuthal er egentlig et arabisk udtryk for "rigtig retning". Det skal i denne sammenhæng forstås sådan, at retninger ud fra røringspunktet ikke ændres under en planprojektion.

Vi vil nu gennemgå den orthografiske og den gnomoniske projektion mere detaljeret.

3.3. Den orthografiske projektion.

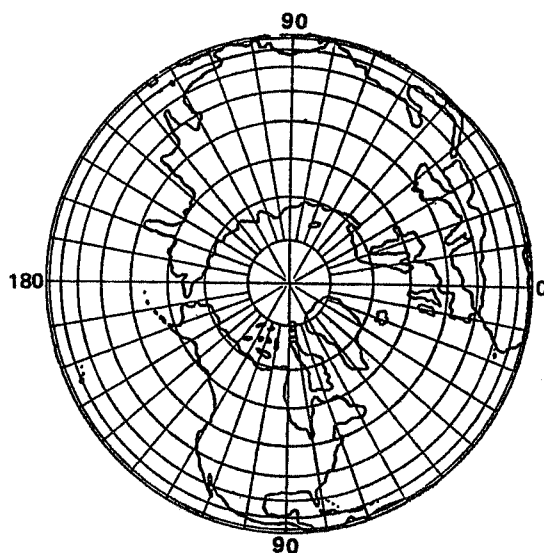


Fig. 33: Et kort fremstillet efter den orthografiske metode. Her er Nordpolen brugt som røringspunkt. Kortet er taget fra Introduction to Map Projections, (1979), af P.W. McDonell.

Principielt er det ligegyldigt, hvilket punkt på globen, der bruges som røringspunkt til billedplanen. Det kunne f. eks. være en af polerne, et ækvatorialpunkt eller den by du bor i. Det væsentlige er, at man benytter et punkt, som er central for det område, man tænker at kortlægge. I det følgende vil vi dog nøjes med at beskrive situationen, hvor Nordpolen N er

valgt som tangeringspunkt for afbildningen. Vælges Sydpolen er situationen helt analog hermed..

Vi er interesseret i at bestemme billedet af en vilkårlig længdebue på den nordlige halvkugle. Lad (A,B) være et par af diametralt modsatte punkter på ækvator. Kaldes Nordpolen for N vil (A,N) (og (B,N)) være et par af ikke-diametralt modsatte punkter. Sættes C til at være globens centrum vil (iflg. 2.2) (A,N) sammen med C entydigt danne en storcirkelplan π . Planen π indeholder imidlertid en mængde af parallelle sigtelinjer, som (jo) skærer billedplanen π_B ortogonalt. Da fællesmængden af to skærende planer π og π_B er en ret linje, vil billedet af en længdebue være et linjestykke (med længden $\text{dist}(A,B)$).

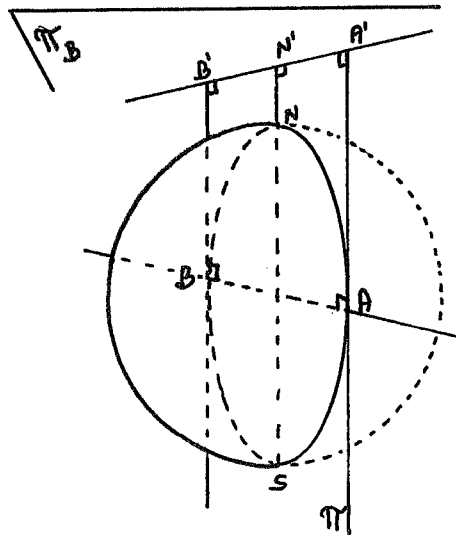


Fig. 34: Billedet af en vilkårlig længdebue på den nordlige halvkugle under den orthografiske projektion. Bemærk at billedplanen ikke rører kugleskallen. Den er af hensyn til anskueligheden parallelforskuet.

Alle breddecirklers planer er parallelle med ækvatorplanen

og dermed billedplanen π_B . Og da projektionslinjerne er vinkelrette på π_B vil billedet af en vilkårlig breddecirkel blive en cirkel med samme radius som den pågældende breddecirkels. Altså bliver billedet af flere breddecirkler en mængde af koncentriske cirkler (fig. 35).

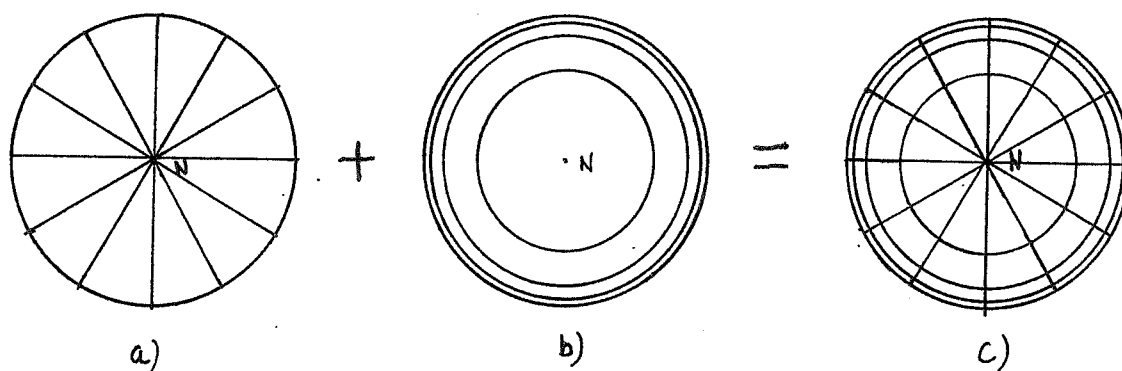


Fig. 35: a) viser længdebuernes billede under den orthografiske projektion. b) viser breddebuernes billede under den orthografiske projektion. c) viser det samlede billede af den orthografiske projektion.

Det er klart at længde-breddebuenettet vil se anderledes ud, hvis man valgte et andet røringspunkt, f. eks. et ækvatorialpunkt.

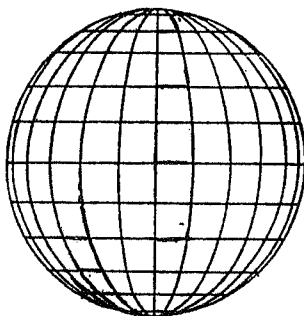


Fig. 36: Længde- og breddebuernes billede under den orthografiske projektion, med et ækvatorialt røringspunkt.

*

Vi vil nu se på, hvor meget afstande på globen ændres ved projektionen. Vi indskrænker os til at finde afstande langs længde- og breddebuer.

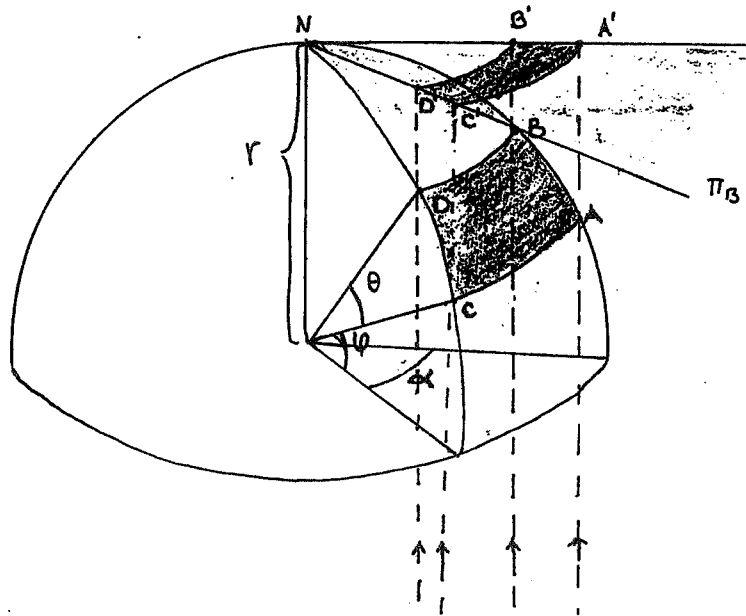


Fig. 37: Området ABDC's billede under den orthografiske projektion.

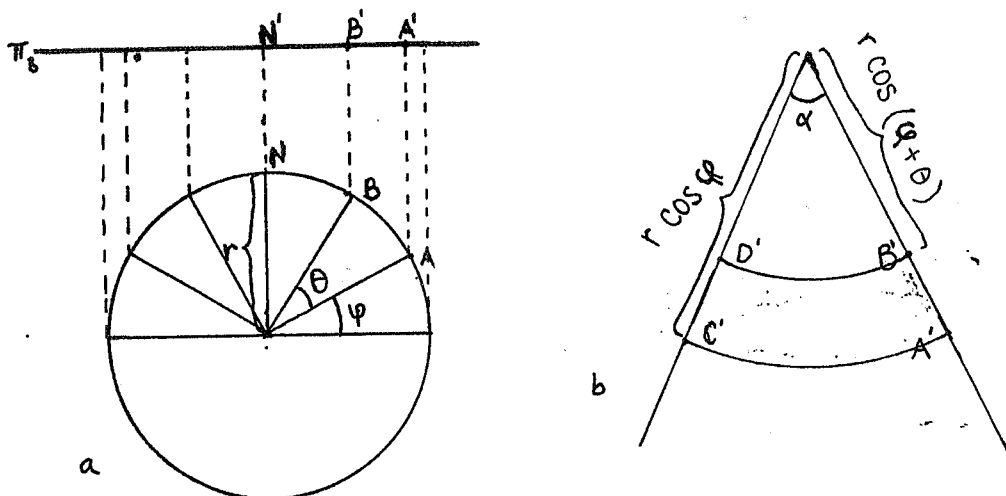


Fig. 38a: AB's billede under den orthografiske projektion.

Af synsmæssige årsager er π_B parallelforskudt.

π_B skulle have tangeret i N.

Fig. 38b: Viser det øverste af fig. 37. Sammenhold de angivne størrelser med fig. 37.

Lad A og B være punkter på en vilkårlig længdebue på den nordlige halvkugle. De tildeles breddegraderne φ og $\varphi+\theta$ henholdsvis. Billederne af A og B kaldes A' og B' (fig. 37). Vi ønsker altså at bestemme forholdet mellem $\text{dist}(A', B')$ og $\text{dist}_k(A, B)$. Af fig. 38a ser vi, at

$$(1): \text{dist}_k(A, B) = r \cdot \theta$$

hvor r er globens radius. Det tilsvarende stykke $A'B'$ på kortet ses at have størrelsen

$$(2): \begin{aligned} \text{dist}(A', B') &= r \cos \varphi - r \cos(\varphi + \theta) \\ &= r(\cos \varphi - \cos(\varphi + \theta)), \end{aligned}$$

idet

$$(3): \text{dist}(A', B') = \text{dist}(N, A') - \text{dist}(N, B').$$

For vilkårlige φ, θ gælder additionsformlen $\cos(\varphi + \theta) = \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta$, og vi får

$$(4): \text{dist}(A', B') = r(\cos \varphi(1 - \cos \theta) + \sin \varphi \sin \theta)$$

og dermed

$$(5): \begin{aligned} \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} &= \frac{\cos \varphi(1 - \cos \theta) + \sin \varphi \sin \theta}{\theta} \\ &= \cos \varphi \frac{(-\cos \theta - (-\cos 0))}{\theta - 0} + \sin \varphi \frac{\sin \theta}{\theta}. \end{aligned}$$

Dette udtryk ser umiddelbart kompliceret ud, men betragter vi en lille vinkel θ , kan vi approximere udtrykket:

$$(6): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} \rightarrow \sin \varphi \text{ for } \theta \rightarrow 0,$$

idet $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ for $\theta \rightarrow 0$ og $\frac{-\cos \theta - (-\cos 0)}{\theta - 0} \rightarrow \sin 0 = 0$

for $\theta \rightarrow 0$, hvilket er resultater fra differentialregningen.

Dermed har vi for små værdier af θ

$$(7): \text{dist}(A', B') \approx \text{dist}_k(A, B) \cdot \sin \varphi \leq \text{dist}_k(A, B).$$

Lader vi φ gå mod $\frac{\pi}{2}$, hvilket svarer til, at punkterne A og B er nær Nordpolen, ses, idet $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, at

$$(8): \text{dist}(A', B') \approx \text{dist}_k(A, B).$$

Små afstande langs længdebuer ved Nordpolen bliver således afbildet i næsten "identiske" afstande.

Da en breddecirkel bliver afbildet i en cirkel af samme størrelse, vil afstande langs breddebuer blive afbildet i identiske afstande. Altså

$$(9): \text{dist}_k(A', C') = \text{dist}_k(A, C) = \alpha \cos \varphi.$$

Dette ses af fig. 38 b).

Vi vil nu betragte et område afgrænset af længde- og breddebuer. Dette område kalder vi ABCD i overensstemmelse med fig. 37.

Arealet af ABCD er tidligere (side 35) beregnet til $\alpha r^2 (\sin(\varphi + \theta) - \sin \varphi)$. Vi kan også bestemme arealet af det afbildede område $A'B'C'D'$. Idet arealet af en cirkel er π gange kvadratet på cirkelns radius, fås arealet $\text{Ar}(A'B'C'D')$ af $A'B'C'D'$ til

$$(10): \text{Ar}(A'B'C'D') = \frac{1}{2} \alpha (r \cos \varphi)^2 - \frac{1}{2} \alpha (r \cos(\varphi + \theta))^2 \\ = \frac{1}{2} \alpha r^2 (\cos^2 \varphi - \cos^2(\varphi + \theta)),$$

thi vi betragter området som differensen af to cirkelbueudsnit med centervinklen α . Arealforholdet bliver så

$$(11): \frac{\text{Ar}(A'B'C'D')}{\text{Ar}(ABCD)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi - \cos^2(\varphi + \theta)}{\sin(\varphi + \theta) - \sin \varphi}.$$

(Bemærk at forholdet er uafhængig af α .) Hvis den orthografiske projektion er arealbevarende skal udtrykket i (11) antage værdien 1 for alle valg af vinkler φ og α . Men ved indsættelse af f. eks. $\varphi = \frac{\pi}{6}$ og $\theta = \frac{\pi}{6}$ ses forholdet at være $1/(8(\sqrt{3}-1))$, hvilket er forskellig fra 1.

Vi kan undersøge visse arealer på en anden måde. Vi forudsætter at θ er lille, dvs. området ABCD er smalt. Med lettere slørede briller kan ABCD på kugleoverfladen betragtes som et tilnærmelsesvis plant "rektangel" med siderne $\widehat{AB}$ og

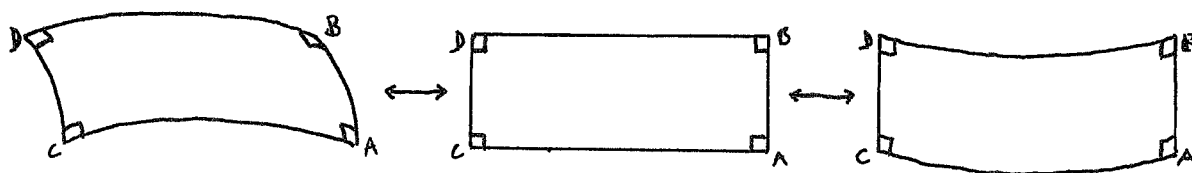


Fig. 39: Den krumme og cirkelbuede "firkant" minder om det tilsvarende plane rektangel i arealmæssig henseende.

$\widehat{AC}$ (fig. 39). Arealet af en sådan er jo sidernes størrelse "ganget med hinanden", dvs. vi med (1) og (9) har

$$(12): \text{dist}_k(A,B) \cdot \text{dist}_k(A,C) = r\theta \cdot r\alpha \cos\varphi \\ = \alpha\theta r^2 \cos\varphi.$$

Helt analogt hermed kan vi opfatte billedet $A'B'C'D'$ som et "rektangel", når (og kun når) θ er lille. Da en breddebue og dens billede har samme form og størrelse har vi, at

$$(13): \text{dist}(A',B') \cdot \text{dist}_k(A',C') = \text{dist}(A',B') \cdot \text{dist}_k(A,C).$$

Dette udtrykker altså en approximeret udgave af billedets areal for θ lille. Arealforholdet med disse tilnærmede arealer bliver altså

$$(14): \frac{\text{dist}(A',B') \cdot \text{dist}_k(A,C)}{\text{dist}_k(A,B) \cdot \text{dist}_k(A,C)} = \frac{\text{dist}(A',B')}{\text{dist}_k(A,B)}.$$

Dette er netop afstandsforholdet mellem længdebuerne. I (6) fandt vi

$$(15): \frac{\text{dist}(A',B')}{\text{dist}_k(A,B)} \rightarrow \sin\varphi \text{ for } \theta \rightarrow 0.$$

For små θ gælder så, at

$$(16): \text{dist}(A',B') \approx \text{dist}_k(A,B) \cdot \sin\varphi.$$

Ved at betragte arealerne på denne lidt søgte facon, har vi opnået (sammenhold (14) og (16)), at

$$(17): \text{Ar}(A'B'C'D') \approx \text{Ar}(ABCD) \cdot \sin\varphi,$$

når φ er lille. Lader vi herefter φ gå mod $\frac{\pi}{2}$, dvs. $\sin\varphi$ går mod 1, fremgår det af (17), at arealerne næsten er ens. Skal vi oversætte disse matematisk funderede resultater til vor fysiske virkelighed, må det blive, at den orthografiske projektion er tilnærmelsesvis arealbevarende i nærheden af Nordpolen (eller røringspunktet). Dette stemmer (vel) også rimeligt overens med vores umiddelbare opfattelse af situationen.

Projektionen er oftest anvendt netop ved afbildninger af et polområde eller et ækvatorditto. En væsentlig grund hertil er, at den afbilder områder ganske pænt i overensstemmelse med vores opfattelse af Jorden, dvs. hvis man sad godt tilbagelænet ude i verdensrummet og betragtede Jorden derfra (se fig. 33).

3.4. Den gnomoniske projektion.

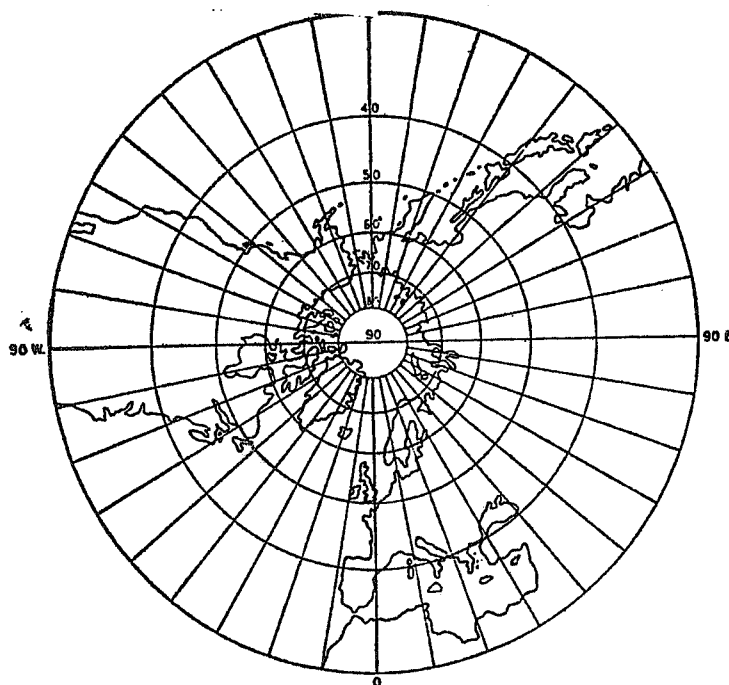


Fig. 40: Gnomonisk kort med Nordpolen som tangeringspunkt. Prøv at sammenligne det med fig. 33. Figuren er taget fra Steers: An Introduction to the Study of Map Projections (1970).

Den centrale eller gnomoniske projektion er af samme overordnede beskaffenhed, som den orthografiske, blot er,

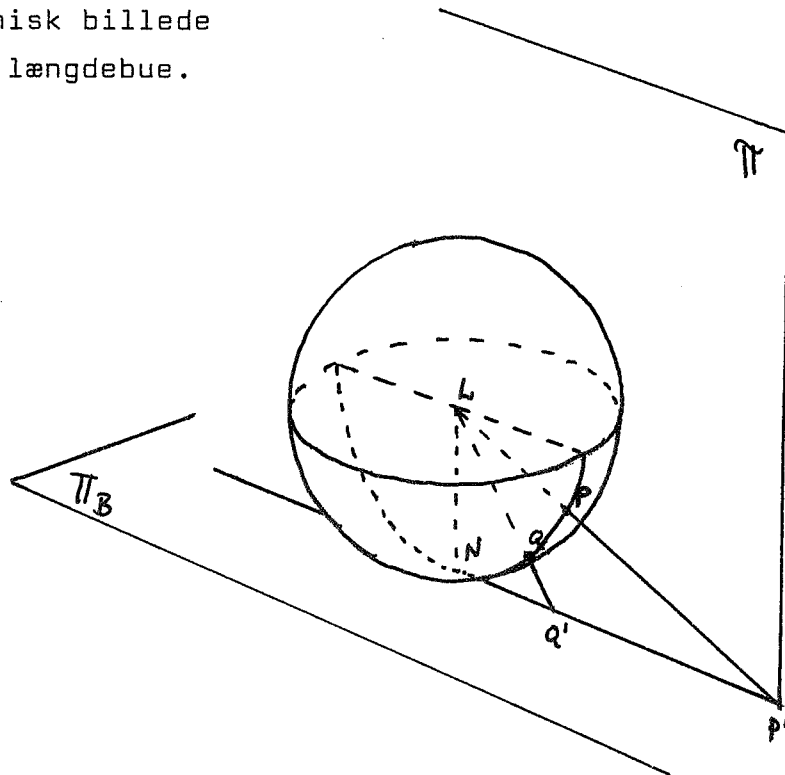
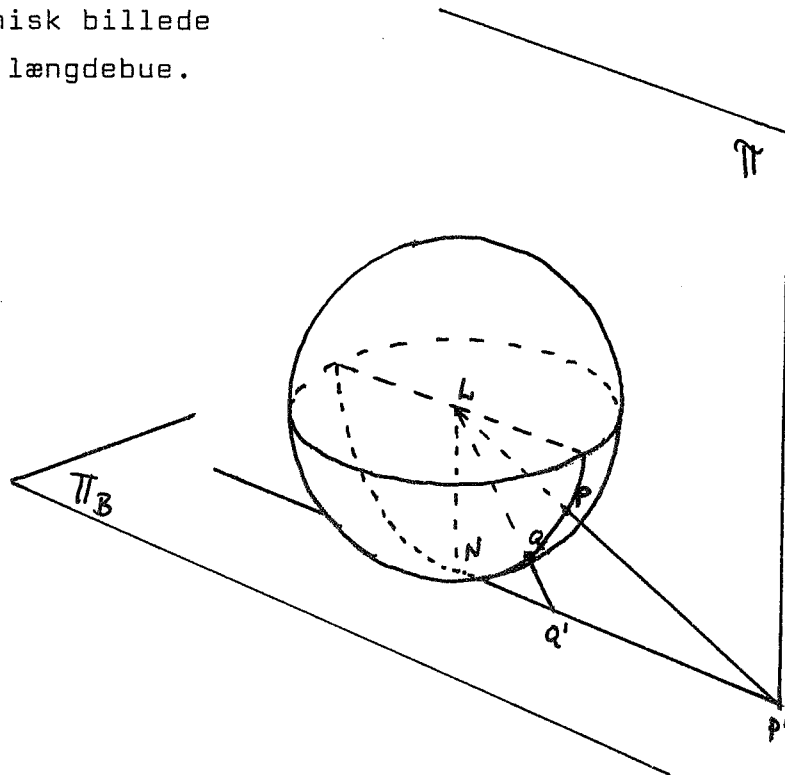
som tidligere sagt, sigtepunktet flyttet fra at være uendeligt fjern fra globen til at være i centrum af samme. Denne projektions tangentplan kan ligesom hos den orthografiske principielt have et vilkårligt punkt på globen fælles med globen. Og igen vil vi for simpelheds skyld bruge Nordpolen N som røringspunkt.

Vi vil først undersøge projektionen af længdebuerne. Det bemærkes, at N analogt til før er et fast punkt for afbildningen (thi en sigtelinje l gennem sigtepunktet L og Nordpolen skærer billedplanen i N).

Betragt et punkt $P \neq N$ på den nordlige hemisfære. Linjestykkerne LP og LN vil da frembringe en plan Π , som indeholder storcirkelbuen - længdecirklen - gennem N og P . Idet LN er vinkelret på og skærer Π_P i en ret linje gennem N . Altså vil længdebuerne afbildes i rette linjer, der alle skærer hinanden i N (fig. 41).

Umiddelbart ligner dette resultat det tilsvarende hos den orthografiske projektion, men der er en forskel, og den ligger begravet i afstandsforholdene, som vi vender tilbage til.

Fig. 41: Gnomonisk billede
af en længdebue.



Næste skridt i kortlægningen er at afbilde breddebuerne fra den nordlige halvkugle.

Betragter vi først en plan π , der indeholder en breddecirkel på den nordlige halvkugle, så ses projektionen af breddecirklen på π at være breddecirklen selv.

Dernæst kan vi danne en kegle med toppunkt i L og afgrænset af breddecirklen frembringes grundfladen for kegle. (Fig. 42a)

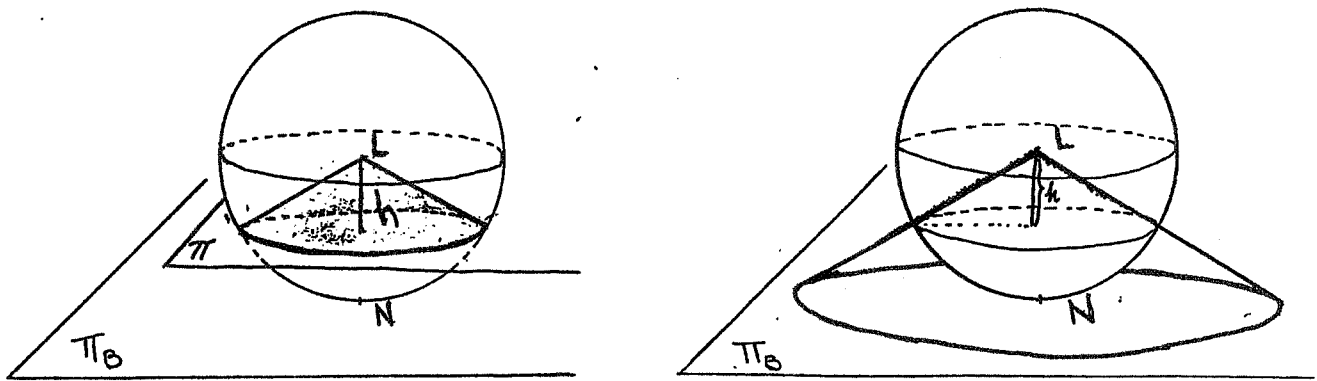


Fig. 42: a) og b) viser skridtene i afbildningen ved den gnomoniske projektion.

Højden h i kegle er da mindre en radius i globen. Forøges højden så $h = \text{dist}(L, N) = r$, så vil grundfladen i denne kegle fremkomme ved at lade π_0 skære kegle i et vandret snit -og det er en cirkel med større radius end breddecirkelns. (Fig. 42b).

Vi vil analogt med den orthografiske projektion undersøge afstandsforholdene under afbildningen.

Lad A og B være punkter på en længdebue og A' og B' være de tilhørende billedpunkter. Vi vil da bestemme forholdet:

$$(1): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)}.$$

Af fig. 43 finder vi, at

$$(2): \tan \angle NLA' = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\text{dist}(N, A')}{r}$$

$$(3): \tan \angle NLB' = \tan \left(\frac{\pi}{2} - (\varphi + \theta) \right) = \frac{\text{dist}(N, B')}{r},$$

idet φ og $\varphi + \theta$ er bredegraderne for henholdsvis A og B, og L er globens centrum (fig. 43).

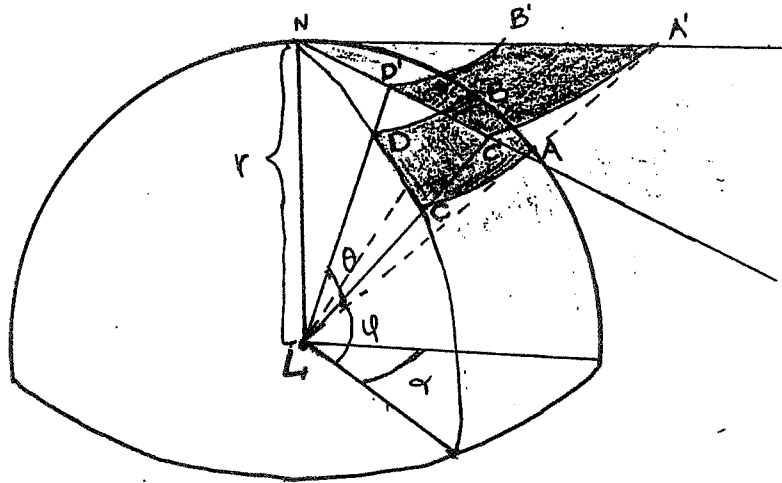


Fig. 43: Området ABDC's billede under den gnomoniske projek-
tion.

Vi kan omskrive (2) og (3) til

$$(4): \text{dist}(N, A') = r \tan \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = r \cot \varphi$$

og

$$(5): \text{dist}(N, B') = r \tan \left(\frac{\pi}{2} - (\varphi + \theta) \right) = r \cot(\varphi + \theta).$$

Med $\text{dist}(A', B') = \text{dist}(N, A') - \text{dist}(N, B')$ har vi, at

$$(6): \text{dist}(A', B') = r(\cot \varphi - \cot(\varphi + \theta)).$$

Da cotangens er forholdet mellem cosinus og sinus kan (6) omskrives til

$$\begin{aligned} (7): \text{dist}(A', B') &= r \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\sin(\varphi + \theta)} \right) \\ &= r \frac{\sin(\varphi + \theta) \cos \varphi - \cos(\varphi + \theta) \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta) \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Ved anvendelse af additionsformlen $\sin((\varphi + \theta) - \varphi) = \sin(\varphi + \theta) \cos \varphi - \sin \varphi \cos(\varphi + \theta)$ får vi

$$(8): \text{dist}(A', B') = r \frac{\sin((\varphi + \theta) - \varphi)}{\sin(\varphi + \theta) \sin \varphi}$$

$$= r \frac{\sin \theta}{\sin(\varphi + \theta) \sin \varphi}.$$

Da $\text{dist}_k(A, B) = r \cdot \theta$ bliver afstandsforholdet

$$\begin{aligned} (9): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} &= \frac{\sin \theta}{\theta \sin(\varphi + \theta) \sin \varphi} \\ &= \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\sin(\varphi + \theta) \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Lader vi så θ vandre mod et meget lille sted (på globen svarer det til, at vi ser på et lille stykke længdebue) kan (9) reduceres til:

$$(10): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \text{ for } \theta \rightarrow 0.$$

Heraf ses det, at små afstande nær Nordpolen (tangeringspunktet) langs længdebuer bliver bevaret nogenlunde, idet

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} \rightarrow 1 \text{ for } \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

For at få et indtryk af hvor meget afstande langs breddebuer forøges, kan vi betragte centervinklen α (fig. 43) mellem punkterne A og C på breddegraden φ . Vinklen mellem billedstykkerne NA' og NC' er da ligeledes α . Afstandsforholdet bliver så

$$\begin{aligned} (11): \frac{\text{dist}_k(A', C')}{\text{dist}_k(A, C)} &= \frac{\alpha \text{dist}(N, A')}{\alpha r \cos \varphi} \\ &= \frac{\text{dist}(N, A')}{r \cos \varphi} \end{aligned}$$

Indsætter vi (4) i (11) fås

$$\begin{aligned} (12): \frac{\text{dist}_k(A', C')}{\text{dist}_k(A, C)} &= \frac{r \cot \varphi}{r \cos \varphi} \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

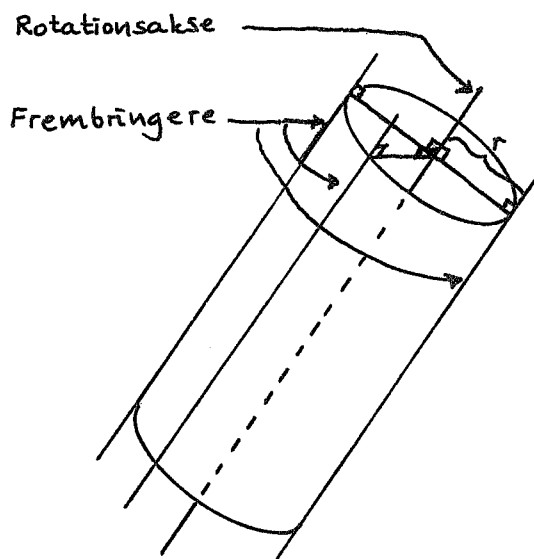
Dette resultat siger os - som tidligere fundet - at ækvator ikke bliver afbildet, thi $\frac{1}{\sin \varphi} \rightarrow \infty$ for $\varphi \rightarrow 0$.

Den gnomoniske projektions anvendelse har tidligere været udbredt, men er efterhånden blevet erstattet af bedre projektionstyper. Man har f. eks. brugt den sammen med Mercatorprojektionen (om denne side 64) til navigation, fordi længdebuerne bliver afbildet i rette linjer samtidig med, at den er azimuthal, altså retningstro udfra Nordpolen.

3.5. Cylinderprojektioner.

Som omtalt i indledningen kan en globus afbildes på en cylinder, der ved opklipning giver et kort. I de tilfælde vi ser på, er cylinderen anbragt om globen således, at den tangerer denne i en storcirkel. Sigtepunktet L kan principielt anbringes flere steder udenfor eller indeni globen. Vi indskrænker os til at undersøge projektioner, hvor sigtepunktet er placeret i centrum af globen. Desuden er cylinderen i alle tilfælde tænkt placeret med ækvator som tangeringscirkel. Den geometrisk ægte projektion har i denne situation ingen praktisk betydning. Det har afledninger af den til gengæld. To af disse - Mercatorprojektionen og Lamberts arealtro cylinderprojektion - vil blive behandlet i dette kapitel. Da de begge i grunden udspringer af den ægte projektion og kan sammenlignes hermed, undersøger vi også dennes udseende og egenskaber i det følgende. Projektionen kaldes den centralcylindriske, og det hentyder til sigtepunktets beliggenhed. Men vi vil først beskrive hvad vi forstår ved en cylinder...

Fig. 44: Frembringelse af en cylinder.



En cylinder er en figur, der tænkes frembragt ved rotation af en ret linje om en akse (linje), der er parallel med linjen. Enhver sådan linje kaldes en frembringer for cylinderen. Cylinderens længde er derfor - matematisk set - uendelig. Cylinderens radius i projektiønsøjemed er lig med globens, r , thi omkredsen af cylinderen er lig længden af en stercirke på globen (fig. 44).

3.6. Den centralcylinderiske projektiøn.

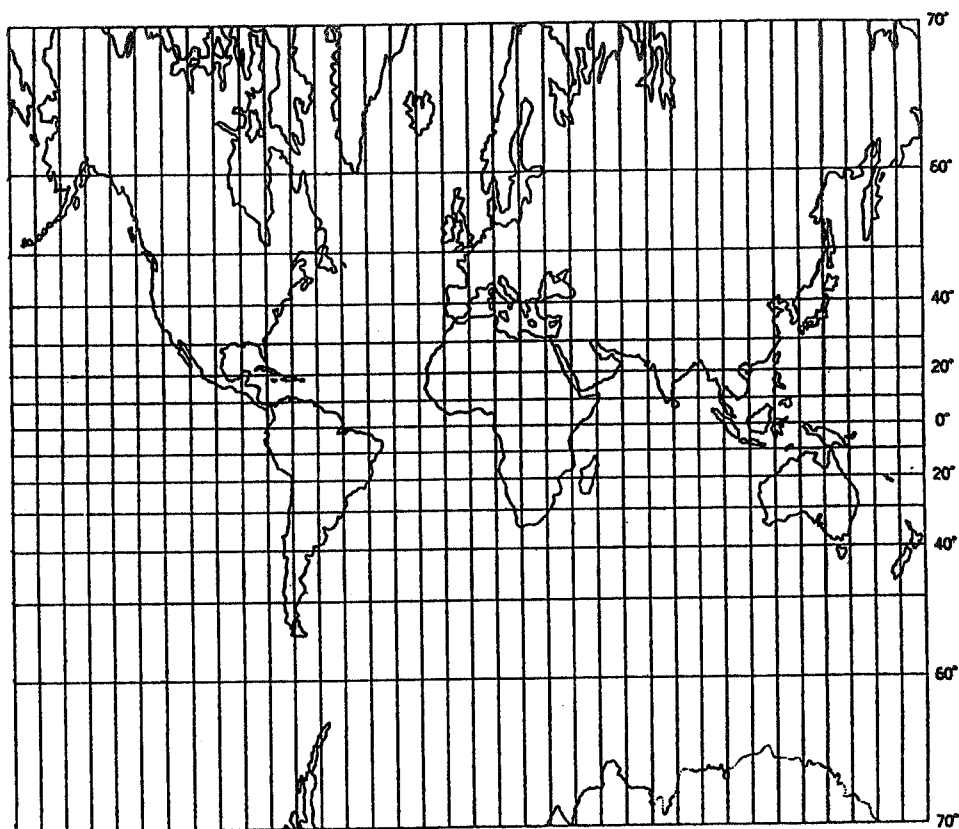


Fig. 45: Et verdenskort dannet ved brug af den centralcylinderiske projektiøn. Kortet er fra

Det første vi bemærker er, at polerne ikke bliver afbildet på cylinderen, thi sigtelinjen gennem sigtepunktet og polerne netop svarer til rotationsaksen, som jo har afstanden $r > 0$ til alle cylinderens frembringere (fig. 46).

Vi er interesserede i at afbilde længde- og breddebuerne med henblik på at undersøge disses egenskaber på kortet.

Fig. 46: Nord- og Sydpolen afbildes ikke med denne projektion.

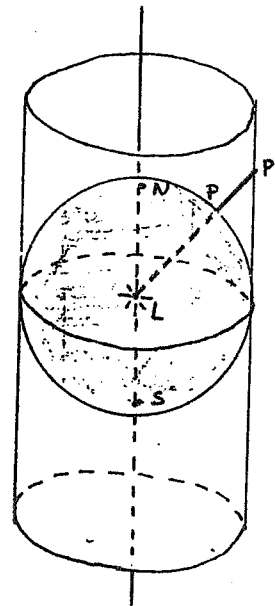
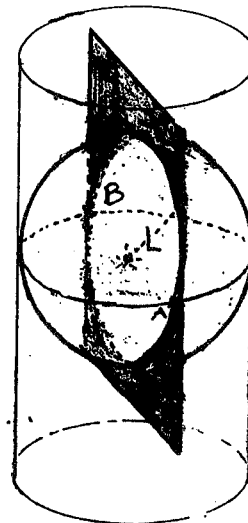


Fig. 47: Længdebuernes billede under den centralcy-linderiske projektion.



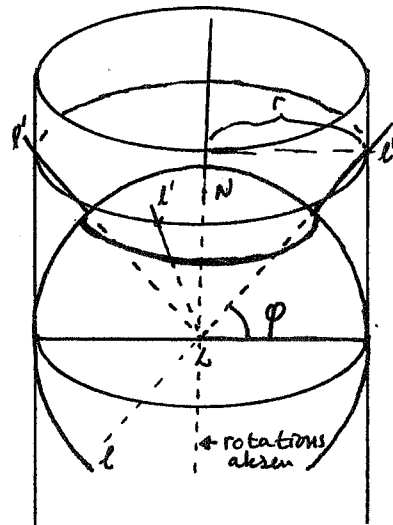
Ækvatorplanen ses at skære cylinderen i en cirkel, der har samme radius r som globen. Vi betragter nu to diametralt modsatte punkter A og B på ækvator. Gennem hver af disse går netop en frembringer for cylinderen. Da A og B begge er beliggende på samme længdecirkel, ses dennes plan π at skære cylinderen i netop de to frembringere gennem A og B. Da π også indeholder sigtepunktet L vil en halv længdebue - fra pol til pol eksklusive disse - blive afbildet i en ret linje (fig. 47).

Vi vil bestemme breddebuernes billeder. Vi lader en ret lin-

je l , forskellig fra rotationsaksen, der indeholder L , skære globen. Fællesmængden mellem l og globen er da to punkter. Disse er beliggende på henholdsvis den nordlige og den sydlige halvkugle svarende til breddegraderne φ og $\varphi + \pi$, hvor $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Vinklen mellem l og cylinderens rotationsakse er da $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Vi betragter nu kun den nordlige halvkugle. De tilsvarende begivenheder på den sydlige halvkugle er analoge. Altså vi ser på halvlinjen $l'cl$ med endepunkt i L og med vinklen φ til ækvatorplanen (fig. 48). Vi lader l' rotere om cylinderens rotationsakse. Derved bliver enhver stilling af l' frembringer for keglen med toppunkt i L . Denne kegles fællesmængde med cylinderen bliver så en cirkel med samme radius r som ækvator, og da φ er vilkårlig valgt, vil breddebuerne alle blive afbildet i sådanne cirkler (fig. 48).

Fig. 48: Billedet af en breddecirkel.

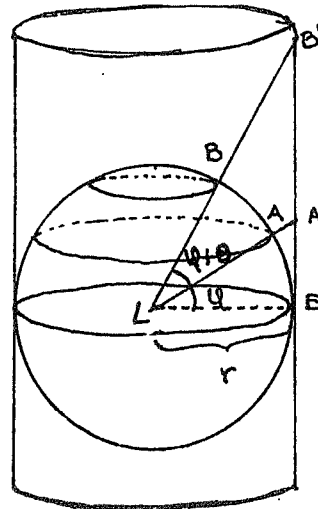


Når cylinderen klippes op langs en frembringer vil billederne af længde- og breddebuer være rette linjer. En længdebues billede vil skære samtlige breddebuers billeder under en ret vinkel. Tilsvarende vil billedet af en breddebue skære alle længdebuebilleder under en ret vinkel.

Nu har vi set det geometriske indhold i afbildningen. Næste skridt bliver, at se de konkrete forandringer, der sker. Altså hvor meget afstande langs længde- og breddebuer bliver forvrænget.

Figur 49 illustrerer en globus indlejret i en cylinder. Vi

Fig. 49: AB's billede under den centralcylindriske projektion.



undersøger, hvad der sker, når to punkter på samme længdebue bliver afbildet.

Lad A og B være punkter på den nordlige halvkugle og beliggende på samme længdebue. Billedpunkterne af disse kaldes A' og B' henholdsvis. Breddegraden til A er φ og til B er breddegraden $\varphi + \theta$. Globens centrum og radius sættes til L respektiv r.

Af fig. 49 fremgår, at

$$(1): \tan \angle ELB' = \frac{\text{dist}(E, B')}{r}$$

og

$$(2): \tan \angle ELA' = \frac{\text{dist}(E, A')}{r}$$

eller ved indsættelse af breddegraderne:

$$(3): \tan(\varphi + \theta) = \frac{\text{dist}(E, B')}{r}$$

og

$$(4): \tan \varphi = \frac{\text{dist}(E, A')}{r}$$

Det fremgår umiddelbart af fig. 49, at

$$(5): \text{dist}(A', B') = \text{dist}(E, B') - \text{dist}(E, A') ,$$

hvor E er tangerinspunktet beliggende på samme frembringer som A' og B'. Ved at anvende (3) og (4) kan vi udtrykke afstanden mellem A' og B' ved

$$\begin{aligned} (6): \text{dist}(A', B') &= r \tan(\varphi + \theta) - r \tan \varphi \\ &= r(\tan(\varphi + \theta) - \tan \varphi) \\ &= r \left(\frac{\tan \varphi + \tan \theta}{1 - \tan \varphi \tan \theta} - \tan \varphi \right) . \end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn følger af additionsformlen for tangens. Vi sætter dette på "fælles brøkstreg" og udnytter, at tangens kan udtrykkes ved cosinus og sinus:

$$\begin{aligned} (7): \text{dist}(A', B') &= r \frac{\tan \theta (1 + \tan^2 \varphi)}{1 - \tan \varphi \tan \theta} \\ &= r \frac{\tan \theta \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)}{1 - \tan \varphi \tan \theta} \\ &= r \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \left(\frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)}{1 - \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\cos \varphi \cos \theta}} . \end{aligned}$$

Det gælder for alle $v \in \mathbb{R}$, at $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$. Dette og at der gælder additionsformlen $\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta = \cos(\varphi + \theta)$ anvender vi på (7) og får:

$$\begin{aligned} (8): \text{dist}(A', B') &= r \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot 1}{\frac{\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta}{\cos \varphi \cos \theta}} \\ &= r \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot 1}{\frac{\cos(\varphi + \theta)}{\cos \varphi \cos \theta}} \\ &= r \frac{\sin \theta \cos \varphi \cos \theta}{\cos \theta \cos^2 \varphi \cos(\varphi + \theta)} \end{aligned}$$

$$= r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi \cos(\varphi + \theta)}$$

På globen antager afstanden $\text{dist}_k(A, B)$ mellem A og B værdien $r\theta$. Herved bliver den nøjagtige afstandsforøgelse langs en længdebue:

$$\begin{aligned} (9): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} &= \frac{r \frac{\sin \theta}{\cos \varphi \cos(\varphi + \theta)}}{r \cdot \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\theta \cos \varphi \cos(\varphi + \theta)} \end{aligned}$$

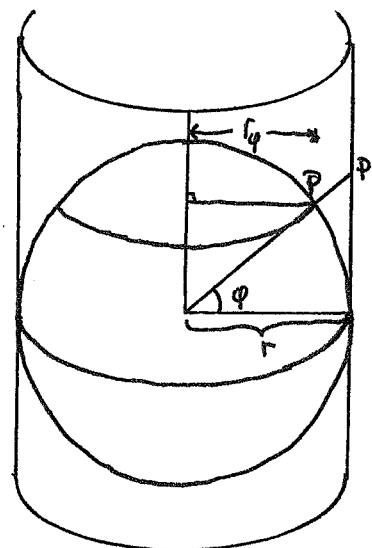
Betragter vi en lille afstand langs længdebuen dvs. θ er lille og udnytter at $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ for $\theta \rightarrow 0$ samt at $\cos(\varphi + \theta) \rightarrow \cos \varphi$ for $\theta \rightarrow 0$ kan vi reducere (9) til

$$\begin{aligned} (10): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} &= \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \varphi \cos(\varphi + \theta)} \\ &\rightarrow \frac{1}{\cos^2 \varphi} \text{ for } \theta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Fortolket svarer resultatet i (10) til, at projektionen ikke er afstandsbevarende langs længdebuer. Men ved eftersyn opnås denne bevarende næsten i området nær ækvator, thi $\frac{1}{\cos^2 \varphi} \rightarrow 1$ for $\varphi \rightarrow 0$.

Vi vil nu undersøge, hvorledes afstandsforandringerne tager sig ud langs breddebuerne. Fig. 50 antyder forholdene.

Fig. 50: Breddecirklen har radien r_φ , og billedet har radien r .



Et punkt A på globen har breddegraden φ og billedpunktet A'. Opgaven kommer ud på, at udtrykke forholdet mellem radius i billedcirklen - som jo er konstant lig globens radius r - og breddecirkelens radius r_φ . Af fig. 50 fremgår, at

$$(11): r_\varphi = r \cos \varphi.$$

altså bliver afstandsforholdet

$$(12): \frac{r}{r_\varphi} = \frac{r}{r \cos \varphi} \\ = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Dette viser, at afstande langs ækvator bliver bevaret, idet $\cos \varphi = 1$ for $\varphi = 0$. Afstande langs breddebuer nær ækvator vil af samme årsag være tilnærmelsesvis bevaret. Projektionen bliver aldrig brugt i praksis, nok fordi den ikke besidder nogen særegne og nyttige egenskaber.

3.7 Mercatorprojektionen.

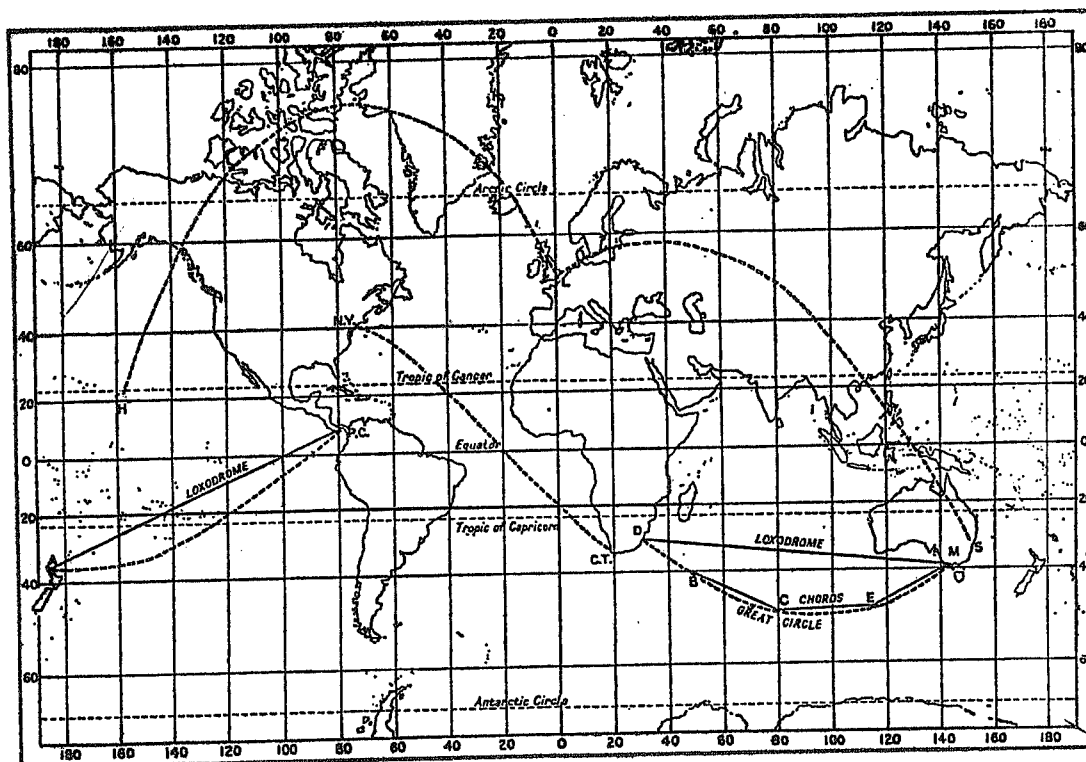


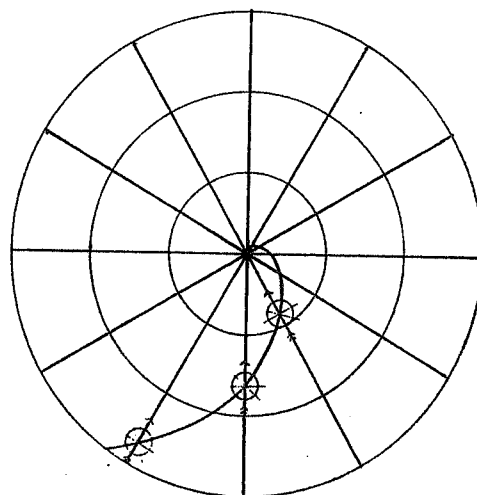
Fig. 51: Et Mercatorkort hentet fra Steers: An Introduction to the Study of Map Projections, (1970).

Det må med det samme siges, at Mercatorprojektionen er meget brugt til verdenskort og er samtidig den mest benyttede i forbindelse med navigering på havene. Navigation er derfor en sag, vi vil forfølge et stykke i denne sammenhæng.

Alle ved, at et kompas angiver - næsten uanset hvor vi befinder os - nord- og sydretningen på kloden. Går vi i kompassets nordvendte retning går vi tilnærmelsesvis langs en længdebue. At det kun er tilnærmelsesvist skyldes, at kompasset angiver retningen til Jordens magnetiske Nordpol og længdebuerne skærer hinanden i Jordens geografiske Nordpol, der ligger et stykke fra den magnetiske. Denne uoverensstemmelse vil vi dog se bort fra her. Drejer vi 90 grader til højre eller venstre og går videre, så vandrer vi langs en breddebue. Det vil sige, at vi med et kompas og en vinkelmåler i hænderne kan aflæse, med hvilken vinkel vi skærer længdebuerne, når vi traver langs en fast retning. Dette lader sig også praktisere på søen, og derfor er det smart at være i besiddelse af et kort, hvorpå man kan tegne sådanne retninger som simple kurver - dvs. rette linjer.

På et kort kaldes kompasretninger for loxodromer. Et eksempel på et kort med den egenskab, at loxodromer er rette linjer, er Mercatorkortet. Til sammenligning kan ses på fig. 52, hvordan en loxodrom tager sig ud på en planprojektion.

fig. 52: Den snoede kurve - loxodromen - afskærer de planprojicerede længdebuer under en konstant vinkel. Figuren er taget fra: Introduction to Map Projections, 1979, af McDonell.



Dette korts betegnelse skyldes ophavsmanden: Gerard Kremer (1512 - 1584). Han udviklede denne projektionstype til at fremstille et verdenskort, som udgaves i 1569. Kremer betyder

kræmmer (handelsmand), hvis latinske oversættelse er Mercator.

Afsætter man to punkter A og B på et centralcylindrisk kort og forbinder A og B med en ret linje, ser vi, at linjen skærer længdebuerne under en konstant vinkel (fig. 53). Men opnår vi også at komme fra A til B, hvis vi på en globus eller på Jorden fulgte denne afstukkede kurs fra kortet? nix!

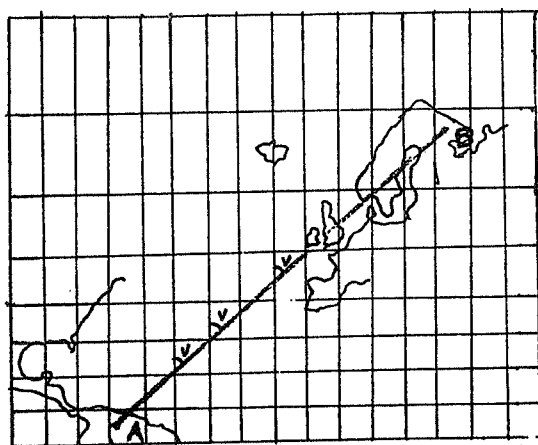


Fig. 53: Retningen fra A til B's skæring med længdebuerne på et centralcylinderisk kort.

En nødvendig betingelse for at nå til B vil være, at v (på figuren) også er den vinkel vi afskærer længdebuerne på Jorden med. Og det er ikke tilfældet. Godt nok er vinklerne mellem billederne af længde- og breddebuerne rette som på Jorden, men det er også de eneste vinkler, der her er bevaret.

I den centralcylindriske afbildning så vi, at afstande langs breddecirkler ændres med den lokalbestemte faktor $\frac{1}{\cos \varphi}$, hvor φ er breddegraden. For at opnå vinkelbevarenhed hos en cylinderprojektion må vi fordre, at afstande langs en længdebue ændres med samme lokale faktor. Det svarer blot til, at vi i et koordinatsystem får overensstemmelse mellem enheder på begge akser.

For at opnå dette betragter vi en infinitesimal afstand mellem to breddebuer på globen. Den kalder vi dy , svarende til en "meget lille" afstand langs en sædvanlig "y-retning" på kor-

tet. På globen svarer dette til en breddegradsforskel på $d\varphi$ og dermed afstanden $r d\varphi$ langs længdebuen. Vi understreger, at dette var lidt løst fortalt. Altså:

$$dy = r \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$$

eller

$$y = r \int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$$

Denne stamfunktion kan beregnes til

$$y = r \cdot \ln \left(\frac{1}{\cos \varphi} + \tan \varphi \right),$$

når der integreres fra ækvator (dvs $\varphi = 0$) til en vilkårlig breddegrad φ . (ln er den naturlige logaritme.)

For en given radius r kan man tabellere (φ, y) -værdier og ad den vej frembringe længde-breddebuenettet til et Mercatorkort (fig. 54).

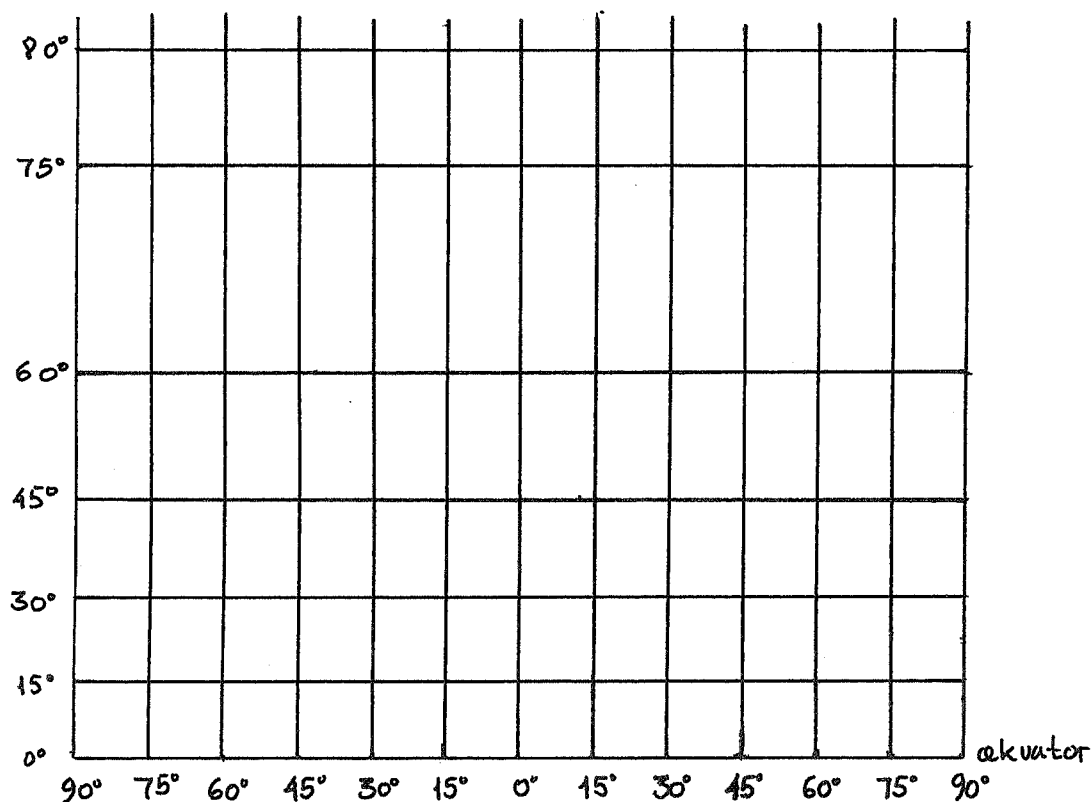


Fig. 54: Længde- breddebuenettet ved Mercatorprojektion. Radius i "globen" er sat til $\frac{12}{\pi}$ cm.

Den korteste afstand mellem to punkter på Jorden bestemmes langs en storcirkelbue gennem punkterne. Storcirkler afskærer imidlertid kun længdebuer under konstant vinkel i visse tilfælde - nemlig når storcirklen er ækvator eller en længdebue. Hvis man sejler langt, kan det være økonomisk at sejle den korteste afstand. Men storcirkelbuer afbildes ikke i rette linjer på et Mercatorkort. I praksis sejler man langs loxodromerne, og beregner med mellemrum en ny kompasskurs således, at man sukcessivt tilnærmer den aktuelle storcirkelbue. (Fig. 51).

3.8. Lamberts arealbevarende cylinderiske projektion.

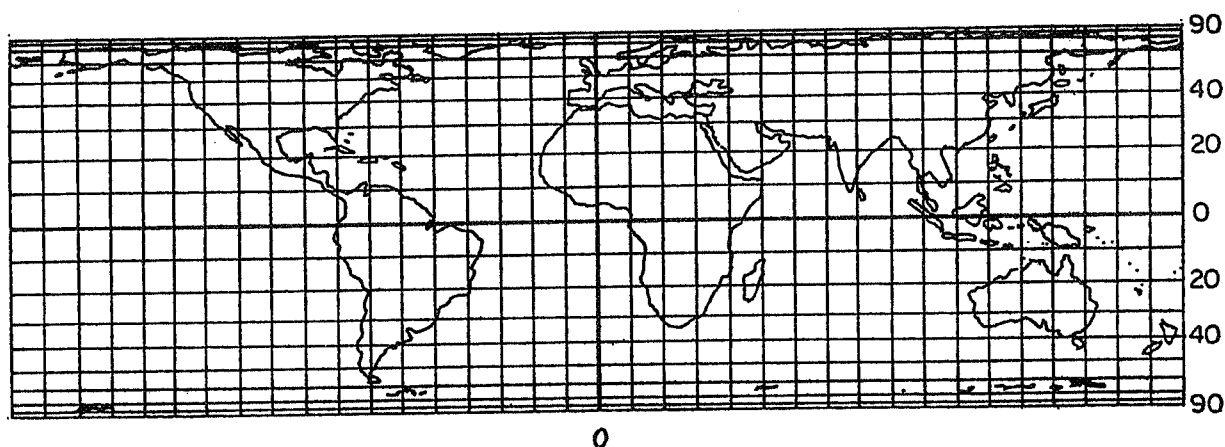


Fig. 55: Taget fra McDonnell: Introduction to Map Projections, (1979).

Denne projektion er principielt anderledes end de to foregående. Hvor den centralcylinderiske projektion havde ét sigtepunkt placeret i centrum af globen, og Mercatorprojektion er en "trigonometrisk" manipulation af denne, har den arealbevarende projektion "en hel akse af sigtepunkter", nemlig en diameter.

For simpeltheds skyld vælger vi poldiameteren som "sigtepunkt". (Fig. 56).

Hver af breddebuernes planer vil indeholde et sigtepunkt, og dermed vil deres billeder være fællesmængden mellem cylinderen og breddebuernes planer, hvilket er en cirkel med samme radius r som globens.

Fig. 56: Lyskilden er hele polaksen.

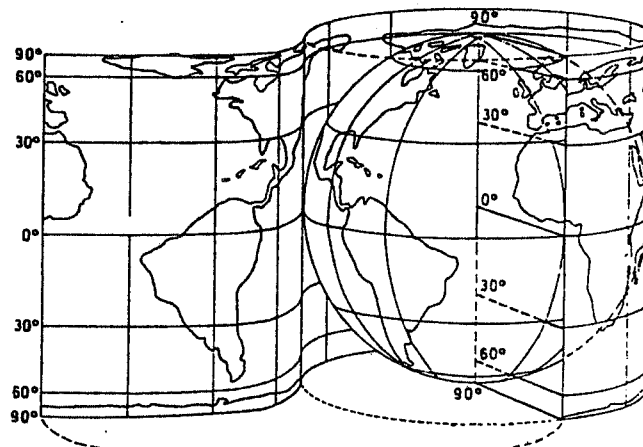
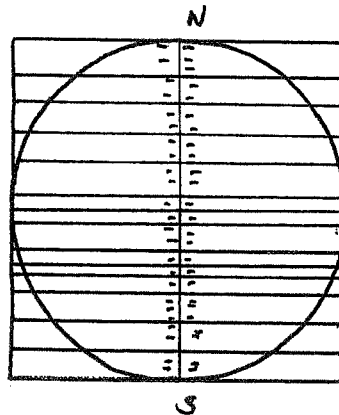


Fig. 57: Lambert's arealbevarende cylindriske kort under ud-rulning. Kortet er taget fra: "Den korteste vej mellem to punkter på et landkort", (1984), af M. E. Larsen.

I modsætning til begge de foregående cylindriske projektio-
ner vil polerne her blive afbildet, idet en tangentplan til
en pol, som er sigtepunkt, vil skære cylinderen i en cirkel.
Der er derfor ikke tale om en afbildning i ordinær forstand,
(fordi ét punkt bliver ført over i en mængde af forskellige
punkter).

Længdecirklerne planer indeholder samtlige sigtepunkter og

skærer cylinderen i rette linjer. Derfor afbildes længdecirklerne i rette linjestykker, hvis længde er $2\pi r$, nemlig globens diameter.

Vi vil herefter beregne nogle konkrete ændringer projektionen indebærer.

Punkterne A' og B' er billederne af punkterne A og B på globen (fig. 58). A og B har breddegraderne φ og $\varphi + \theta$ henholdsvis, og A og B ligger på samme længdebue.

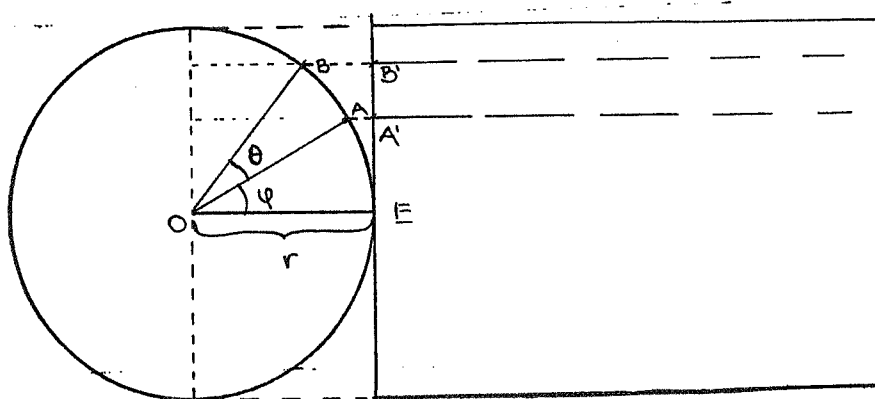


Fig. 58: AB 's billede under Lamberts' arealbevarende cylindriske projektion.

Vi er interesseret i at bestemme forholdet $\frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)}$, hvor $\text{dist}_k(A, B) = r\theta$. Af fig. 58 fremgår, at

$$(1): \text{dist}(A', B') = \text{dist}(B', E) - \text{dist}(A', E),$$

hvor E er røringspunktet beliggende på samme længdebue som A og B . Endvidere ses, at

$$(2): \sin \angle EOA = \frac{\text{dist}(A', E)}{r} \Rightarrow \text{dist}(A', E) = r \sin \varphi$$

og

$$(3): \sin \angle EOB = \frac{\text{dist}(B', E)}{r} \Rightarrow \text{dist}(B', E) = r \sin(\varphi + \theta),$$

hvor O er globens centrum.

Vi har nu, at

$$(4): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} = \frac{\sin(\varphi + \theta) - \sin\varphi}{\theta}$$

Der gælder additionsformlen for sinus: $\sin(\varphi + \theta) = \sin\varphi \cos\theta + \sin\theta \cos\varphi$. Indsættes dette i (4) fås

$$\begin{aligned} (5): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} &= \frac{\sin\varphi \cos\theta + \sin\theta \cos\varphi - \sin\varphi}{\theta} \\ &= \frac{\sin\varphi(\cos\theta - 1)}{\theta} + \frac{\sin\theta}{\theta} \cos\varphi. \end{aligned}$$

Betragter vi så en lille vinkel θ svarende til et lille stykke $\widehat{AB}$ fås, i stedet for (5),

$$(6): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} \rightarrow \sin\varphi \cdot 0 + 1 \cdot \cos\varphi = \cos\varphi \text{ for } \theta \rightarrow 0,$$

idet $\frac{\sin\theta}{\theta} \rightarrow 1$ og $\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \rightarrow 0$ for $\theta \rightarrow 0$. Dvs. afbildningen kun er afstandstro langs længdebuerne i nærheden af ækvator - og det endda kun tilnærmelsesvist. Det ses af, at $\cos\varphi \rightarrow 1$ for $\varphi \rightarrow 0$.

Breddebuerne bliver afbildet ligesom i den centralcylindriske projektion. Derfor ændres breddebuerne med den lokale faktor $\frac{1}{\cos\varphi}$ under afbildningen.

Det specielle ved denne afbildning er, at den er arealtro. Vi har tidligere bemærket (kap. 2.2.), at globens overfladeareal er $4\pi r^2$. Ved Lamberts projektion er kortets areal lig cylindrens højde, $2r$, multipliceret med dens omkreds (= ækvators), $2\pi r$, hvilket giver $4\pi r^2$. Altså er globens totale overfladeareal lig kortets totale areal.

Men begrebet arealtro dækker også over, at vilkårlige områder skal bevare deres arealer under afbildningen. Lader vi derfor ABCD være et område på globen afgrænset af længde- og breddebuer, og $A'B'C'D'$ billedet af dette område, så skal vi bestemme forholdet mellem arealerne $\text{Ar}(ABCD)$ og $\text{Ar}(A'B'C'D')$, (fig. 59).

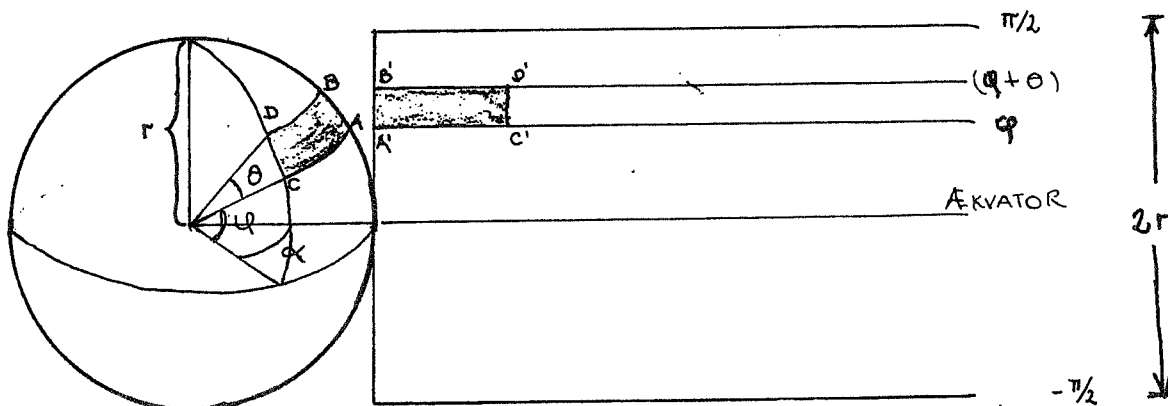


Fig. 59: Området ABCD's billede under Lamberts' arealbevarende cylindriske projektion.

Vi har tidligere fundet, at:

$$(7): \text{dist}(A', B') = r(\sin(\varphi + \theta) - \sin\varphi).$$

Sættes længdegradsforskellen mellem længdebuerne indeholdende $\widehat{AB}$ hhv. $\widehat{CD}$ til α , da vil afstanden mellem længdebuernes billeder være konstant lig med $r\alpha$. Dvs., at

$$(8): \text{dist}(A', C') = \text{dist}(B', D') \\ = r\alpha.$$

Da $A'B'C'D'$ er et (ægte) rektangel vil arealet af billedet blive:

$$(9): \text{Ar}(A'B'C'D') = \text{dist}(A', C') \cdot \text{dist}(A', B') \\ = r\alpha \cdot r(\sin(\varphi + \theta) - \sin\varphi) \\ = \alpha \cdot r^2(\sin(\varphi + \theta) - \sin\varphi),$$

hvilket præcis er lig $\text{Ar}(ABCD)$ (se kap. 2.11.). Dermed har vi godtgjort, at Lamberts projektion er arealbevarende, thi vi tilnærmelsesvist kan inddele et hvilket som helst område i et antal mindre områder, som hver for sig er afgrænset af længde- og breddebuer, og billedernes arealer kan beregnes af (9).

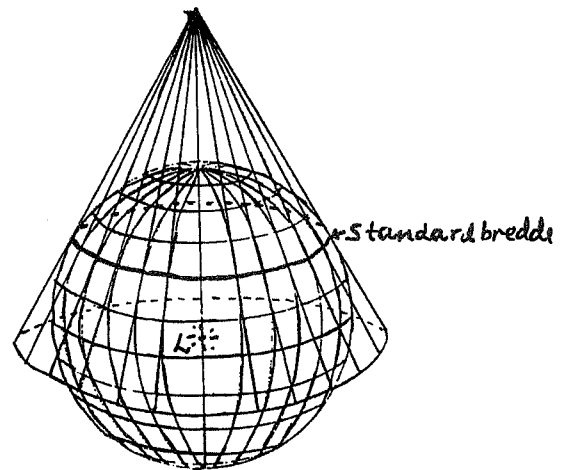
Lamberts arealtro projektion er sjældent brugt, men kan med

rimeligt resultat anvendes til kortlægning af områder nær ækvator.

3.9. Kegleprojektioner.

En kegleprojektion er en afbildning af en globus på en kegle, der er anbragt således, at en lillecirkel på globen er tangeringscirkel til keglen.

Fig. 60: Her er en kegle anbragt således, at en breddecirkel er tangeringscirkel. En sådan kaldes en standardbredde.



Den normale strategi er at anbringe projektionens sigtepunkt L i globens centrum og lade tangeringscirklen være en bestemt breddecirkel, der altså ikke kan være ækvator. Herved opstår to mulige afbildningssystemer: Enten at lade tangeringscirklen være på den sydlige eller på den nordlige halvkugle. Vi har på grund af den mere udbredte anvendelse valgt at undersøge sidstnævnte tilfælde.

Tangeringscirklen mellem keglen og globen kaldes for en standardbredde, hvorved der refereres til en breddecirkel.

Det er næsten åbenbart, at vort valg af standardbredde - på den nordlige halvkugle - medfører, at en væsentlig del af den sydlige halvkugle ikke kan afbildes. For bl.a. at indse dette vil vi definere, hvad vi forstår ved en kegle.

En kegle er en rumlig figur, det her tænkes frembragt ved rotation af en halvlinje om en akse, hvor halvlinjens endepunkt er et fixpunkt for rotationen. Derved danner halvlinjen en vinkel φ - der er konstant under rotationen - med akse. Enhver sådan halvlinje kaldes en frembringer for keglen (fig. 61).

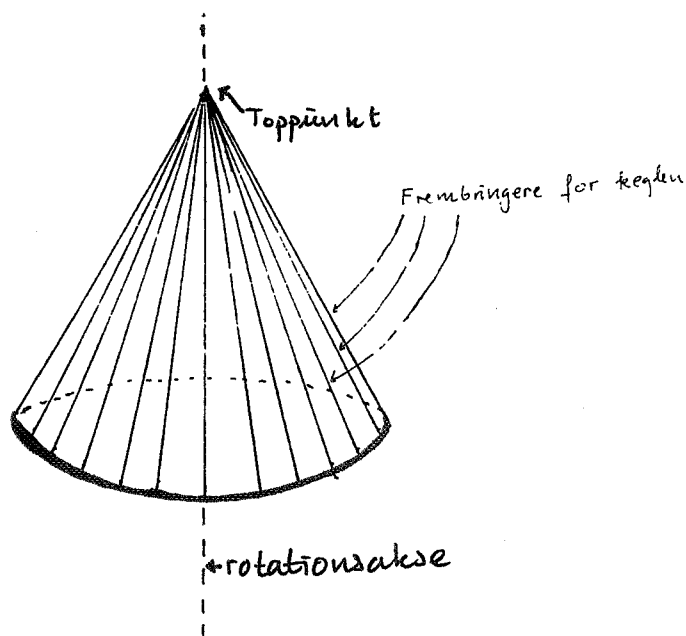


Fig. 61: Frembringelse af en kegle.

I praksis vil der naturligvis ikke være tale om en halvlinje i matematisk forstand, men derimod om et begrænset linjestykke, som står i rimlig størrelsesforhold til den anvendte globus.

For at se kegleprojektionens umiddelbare begrænsning kalder vi sigtepunktet i globens centrum for L og billedpunktet af Nordpolen for N' , der tillige er keglens toppunkt. Linjen l gennem L og N' er herved keglens rotationsakse. Vi parallelforskyder keglen stykket $N'L$ så den forskudte kegles toppunkt bliver L (fig. 62). Derved opnås, at det sydlige af globens område, som er afgrænset af den forskudte kegles frembringere, ikke vil blive afbildet på den oprindelige kegle.

Der findes et større antal kegleprojektioner, hvoraf de fleste ikke er ægte projektioner i geometrisk forstand. Man kan bemærke, at hvis keglens toppunkt tænkes anbragt uendeligt fjernt fra globen i stedet for i globens centrum, vil vinklen mellem frembringer og rotationsakse gå mod nul og projectionen vil udartes til en cylinderprojektion (fig. 63).

Den nok mest anvendte kegleprojektion er den "simple perspek-

tiv kegleprojektion", og som derfor vil blive beskrevet nærmere i det følgende.

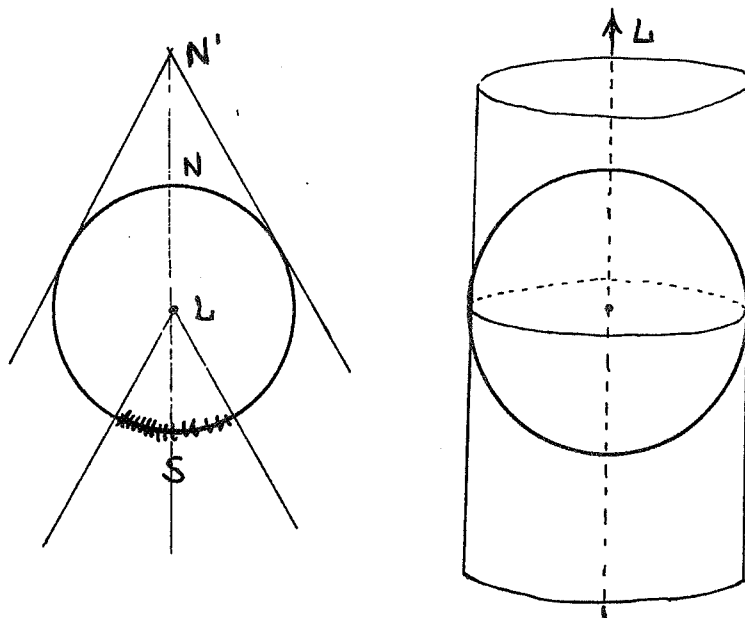


Fig. 62: Det "skraverede" område afbildes ikke ved en kegleprojektion.

Fig. 63: Antydning af en cylinderprojektion. Et grænsetilfælde af en kegleprojektion.

3.10. Den simple perspektiv kegleprojektion.

Vi viser først, hvorledes længde- og breddebuer bliver afbildet på keglen. Dernæst undersøger vi hvorledes keglens udfoldning tager sig ud, specielt hvordan længde- og breddebuerne tager sig ud på det flade kort.

Tangeringscirklen er en breddecirkel $\neq$ ækvator. Vi lader A og B være to diametralt modsatte punkter på denne cirkel. Gennem A og B vil der netop gå én længdebue. Keglen rotationsakse vil indeholde Nordpolen N, sigtepunktet L og midtpunktet af diameteren AB samt keglens toppunkt N' . Længdecirkelns plan π frembragt af NA og NB vil tillige være frembragt af $N'A$ og $N'B$, hvorved billedet af en længdecirkel netop er to af keglens frembringere. (Fig. 64).

Vi vil så se på breddecirklerne billeder. Det er åbenbart, at standardbreddens plan skærer keglen i breddecirklen selv, (sigtelingerne fra L gennem standardbreddens punkter skærer

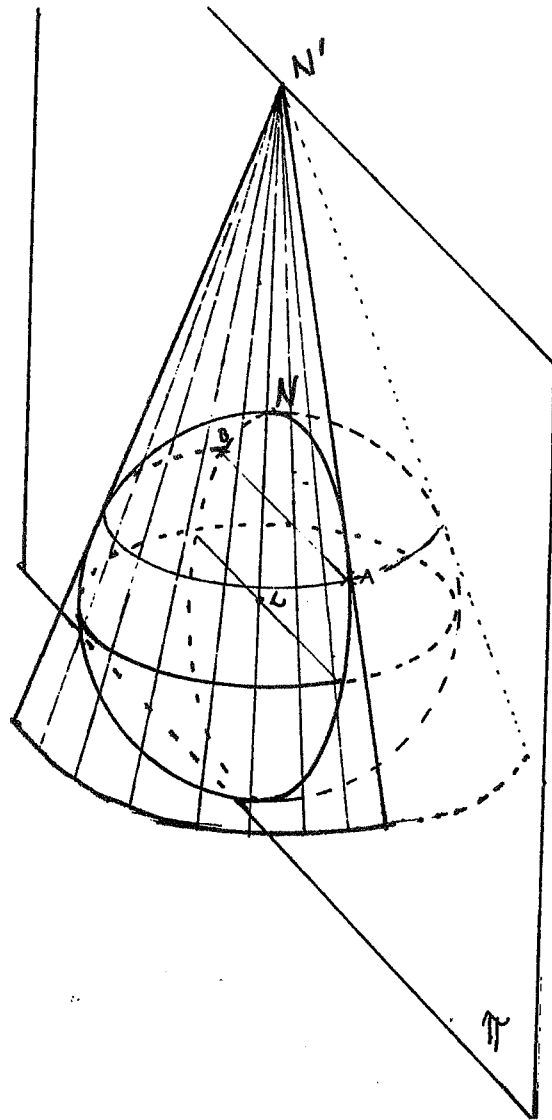


Fig. 64: Billedet af en længdecirkel under den simple perspektiv kegleprojektion.

keglens frembringere i standardbreddens punkter.) Det er ej heller svært at se, at en vilkårlig breddecirkels billede er en cirkel, dog med en anden radius end breddecirkelns. Men billedets centrum vil ligge på keglens rotationsakse gennem N' og L .

*

Vinklen mellem den betragtede kegles rotationsakse og en vilkårlig af dens frembringere er lig breddegraden til standardbreddens punkter. Dette er indlysende, thi globeradien fra L

Lad globen have radien r , så vil

$$(1): \text{dist}_k(A, B) = r\psi,$$

hvor ψ er breddegradsforskellen mellem breddegraderne til A og B . Vi ønsker i første omgang at finde et udtryk for $\text{dist}(A', B')$, altså for afstanden mellem billedpunkterne A' og B' . Af fig. 66 følger, at

$$(2): \tan \angle SLB' = \frac{\text{dist}(S, B')}{\text{dist}(L, S)}$$

og

$$(3): \tan \angle SLA' = \frac{\text{dist}(S, A')}{\text{dist}(L, S)},$$

hvor S er punktet på standardbredden og som ligger på samme frembringer som A' og B' . Det ses, at $\text{dist}(L, S) = r$. Desuden er $\angle SLB' = \theta + \psi - \varphi$ og $\angle SLA' = \theta - \varphi$. Vi kan så omredigere (2) og (3) til

$$(4): \text{dist}(S, B') = r \tan(\theta + \psi - \varphi)$$

og

$$(5): \text{dist}(S, A') = r \tan(\theta - \varphi).$$

Udnytter vi så, at

$$(6): \text{dist}(A', B') = \text{dist}(S, B') - \text{dist}(S, A'),$$

indses følgende ((4) og (5) indsættes i (6)):

$$(7): \begin{aligned} \text{dist}(A', B') &= r(\tan(\theta + \psi - \varphi) + \tan(\theta - \varphi)) \\ &= r(\tan((\theta - \varphi) + \psi) + \tan(\theta - \varphi)) \end{aligned}$$

Additionsformlen for tangens med sum af to vinkler - her $(\theta - \varphi)$ og ψ - antager formen: $\tan((\theta - \varphi) + \psi) = \frac{\tan(\theta - \varphi) + \tan \psi}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi}$. Dette indsættes i (7):

$$(8): \begin{aligned} \text{dist}(A', B') &= r \left(\frac{\tan(\theta - \varphi) + \tan \psi}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi} - \tan(\theta - \varphi) \right) \\ &= r \frac{\tan(\theta - \varphi) + \tan \psi - \tan(\theta - \varphi)(1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi)}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi} \end{aligned}$$

$$= r \frac{\tan \psi + \tan^2(\theta - \varphi) \tan \psi}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi}.$$

Det andet lighedstegn følger af at have lavet fællesnævner. Tangens kan skrives som forholdet mellem sinus og cosinus. Det vil vi bruge her:

$$\begin{aligned} (9): \text{dist}(A', B') &= r \frac{\tan \psi (1 + \tan^2(\theta - \varphi))}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi} \\ &= r \frac{\tan \psi \left(\frac{\cos^2(\theta - \varphi) + \sin^2(\theta - \varphi)}{\cos^2(\theta - \varphi)} \right)}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi} \\ &= r \frac{\tan \psi \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta - \varphi)}}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \psi} \\ &= r \frac{\frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos^2(\theta - \varphi)}}{1 - \frac{\sin(\theta - \varphi) \sin \psi}{\cos(\theta - \varphi) \cos \psi}} \\ &= r \frac{\frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos^2(\theta - \varphi)}}{\frac{\cos(\theta - \varphi) \cos \psi - \sin(\theta - \varphi) \sin \psi}{\cos(\theta - \varphi) \cos \psi}}. \end{aligned}$$

Med additionsformlen: $\cos(\theta - \varphi) \cos \psi - \sin(\theta - \varphi) \sin \psi = \cos((\theta - \varphi) + \psi)$ i baghånden, kan (9) omskrives til

$$\begin{aligned} (10): \text{dist}(A', B') &= r \frac{\frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos^2(\theta - \varphi)}}{\frac{\cos(\theta - \varphi) \cos \psi}{\cos(\theta - \varphi) \cos \psi}} \\ &= r \frac{\sin \psi}{\cos(\theta - \varphi) \cos((\theta - \varphi) + \psi)}. \end{aligned}$$

(1) og (10) giver så anledning til afstandsforholdet

$$(11): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} = \frac{r \sin \psi}{r \cdot \psi} = \frac{\sin \psi}{\psi}.$$

$$= \frac{\sin \psi}{\psi} \cdot \frac{1}{\cos(\theta - \varphi) \cos((\theta - \varphi) + \psi)}.$$

(11) er ikke et simpelt udtryk, men betragter vi en lille afstand $\text{dist}_k(A, B)$, dvs. ψ lille, vil (11) få udseendet:

$$\begin{aligned} (12): \frac{\text{dist}(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} &\rightarrow 1 \cdot \frac{1}{\cos(\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta - \varphi)} \quad \text{for } \psi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

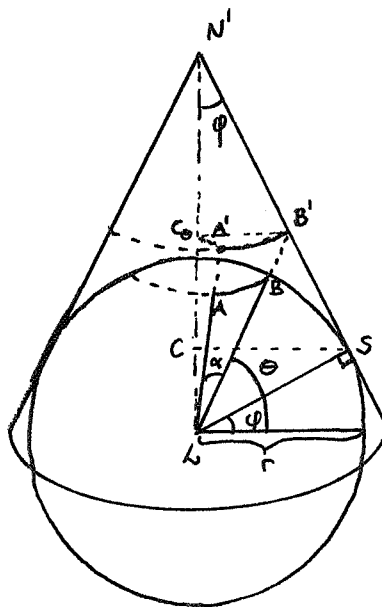
Heraf kan bemærkes at kegleprojektion "kun" er tilnærmelsesvist afstandstro langs længdebuer, når vi betragter området nær standardbredden, thi

$$\begin{aligned} (13): \frac{1}{\cos^2(\theta - \varphi)} &\rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= 1 \quad \text{for } \theta \rightarrow \varphi. \end{aligned}$$

*

Nu handler det om afstandsforandringer langs breddebuer. Her- til vil vi bruge fig. 67.

Fig. 67: Skitse og nomenklatur til bestemmelse af afstandsforholdet langs breddebuer under afbildningen.



Hvis breddegraden til en breddecirkel er lig θ , er radius r_θ

i breddecirklen lig $r \cos \theta$. Vi betragter to punkter A og B beliggende på en sådan breddecirkel. Vinklen mellem A og B - dvs. forskellen i de tilhørende længdegrader - sættes til α .

Vi bemærker, at afstanden mellem A og B langs breddebuen ikke er en storcirkelbueafstand, men en afstand målt på en lille-cirkel. Vi finder så

$$(14): \text{dist}_k(A, B) = \alpha \cdot r \cdot \cos \theta.$$

For at bestemme $\text{dist}_k(A', B')$ er vi nødsaget til at fastlægge $\text{dist}(C_\theta, A')$ ($\text{dist}(C_\theta, B')$), hvor C_θ er centrum i billedcirklen. Da nu $\angle SN'L = \varphi$ og $\angle N'SL = \frac{\pi}{2}$ ses af fig. 67, at

$$(15): \cot \varphi = \frac{\text{dist}(N', S)}{r} \Rightarrow \text{dist}(N', S) = r \cot \varphi.$$

videre ses:

$$(16): \text{dist}(N', A') = \text{dist}(N', S) - \text{dist}(A', S).$$

Da fig. 67 er i overensstemmelse med fig. 66 kan vi indsætte (5) i (16). Samtidig anvender vi (15):

$$(17): \begin{aligned} \text{dist}(N', A') &= r \cot \varphi - r \tan(\theta - \varphi) \\ &= r(\cot \varphi - \tan(\theta - \varphi)). \end{aligned}$$

Vi udnytter så, at $\angle C_\theta N'A' = \varphi$ og at $\angle N'C_\theta A'$ er ret, thi vi derved får

$$(18): \sin \varphi = \frac{\text{dist}(C_\theta, A')}{\text{dist}(N', A')}.$$

Ved anvendelse af (17) på dette fås:

$$(19): \begin{aligned} \text{dist}(C_\theta, A') &= r(\cot \varphi - \tan(\theta - \varphi)) \sin \varphi \\ &= r(\cos \varphi - \tan(\theta - \varphi) \sin \varphi). \end{aligned}$$

Det er herefter klart, at

$$(20): \text{dist}_k(A', B') = ar(\cos\varphi - \tan(\theta - \varphi)\sin\varphi),$$

og afstandsforholdet bliver (vi bruger (14) og (20)):

$$(21): \frac{\text{dist}_k(A', B')}{\text{dist}_k(A, B)} = \frac{\cos\varphi - \tan(\theta - \varphi)\sin\varphi}{\cos\theta}.$$

Som en slags kontrol kan vi se, at hvis $\theta = \varphi$, dvs. vi kun bevæger os langs standardbredden, så bliver afstandsforholdet

$$(22): \frac{d_k(A', B')}{d_k(A, B)} = 1,$$

hvilket er i overensstemmelse med at afstande langs standardbredden bevares under afbildningen.

3.11. Opklipping.

Når keglen med afbildede bredde- og længdebuer klippes op langs en frembringer vil processen være meget lig den fig. 68 gengiver. Længdebuernes billeder - som ikke er angivet på figuren - vil være linjestykker, hvis ene endepunkt er N' og hvis andet endepunkt vil ligge på delcirkelranden $\widehat{XQ}$ (fig. 68b). Ved fremstilling af et keglekort forekommer det besværligt først at lave en kegle etc. Man kommer en del nemmere til kortet ved at bestemme vinklen v på fig. 68b. Så det vil vi gøre her.

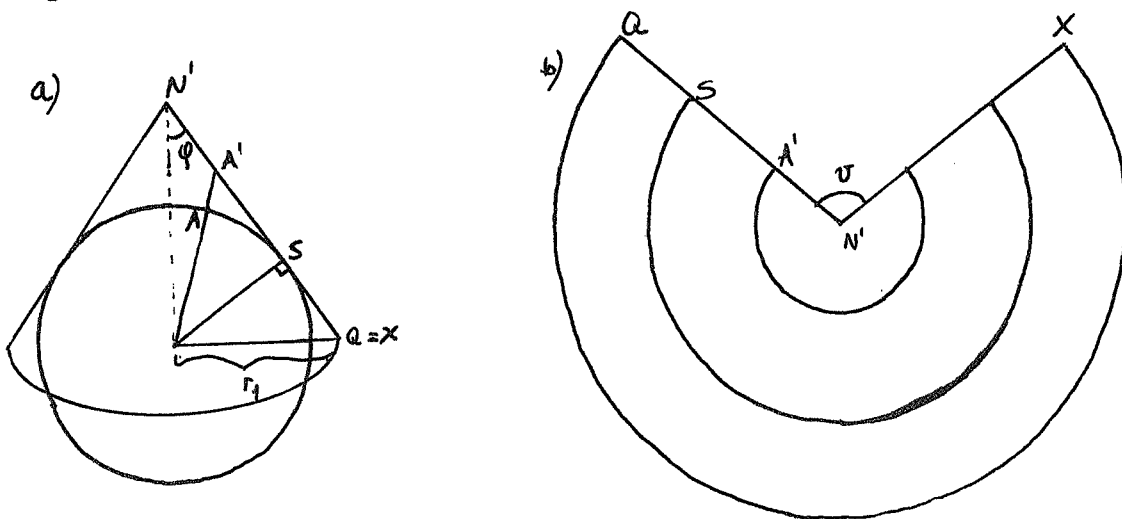


Fig. 68: En kegles udfoldning.

Vi betragter en kegle à la den på fig. 68a. Linjestykket $N'Q$ vil være radius i den udfoldede kegle (fig. 68b). Med figurerens betegnelser ses, at buestykket mellem Q og X (det mindste af dem) kan skrives på to måder:

$$(1): \text{dist}_k(X, Q) = v \cdot \text{dist}(N', Q)$$

$$(2): \text{dist}_k(X, Q) = 2\pi \cdot \text{dist}(N', Q) - 2\pi r_1 \\ = 2\pi(\text{dist}(N', Q) - r_1)$$

Det turde være umiddelbart, at

$$(3): r_1 = \text{dist}(N', Q) \cdot \sin \varphi.$$

Indsættes (3) i (2) og sættes (1) og (2) lig hinanden fås:

$$(4): v \cdot \text{dist}(N', Q) = 2\pi(\text{dist}(N', Q) - \text{dist}(N', Q) \cdot \sin \varphi) \\ = 2\pi(1 - \sin \varphi) \cdot \text{dist}(N', Q).$$

Da $\text{dist}(N', Q) \neq 0$ kan vi forkorte (4) til

$$(5): v = 2\pi(1 - \sin \varphi).$$

Af dette ses, at man kan fremstille det flade keglekort uden at fumle sig frem med egen kegleklipper. Man skal blot beslutte, hvilken standardbreddegrad φ , man ønsker at anvende. Det kan da være smart at vælge en breddegrad, der går midt gennem det område man vil kortlægge. Hvis det f. eks. handlede om Danmark - der er et yndet kegleprojektionsområde - vil det være smart at bruge $50^\circ N$ som standardbreddegrad.

Kegleprojektioner er meget benyttede selvom de hverken bevarer afstande eller arealer eller vinkler. Men hvis man nøjes med at kortlægge et område, der er forholdsvis smalt, et stykke fra ækvator, vil kegleprojektion give et ganske godt billede af det afbildede områdes virkelige kontur.

4. Afslutning.

Vi har i de foregående kapitler beskæftiget os med forskellige projektioner og projektionstyper og antydte enkle metoder til fremstilling af kort på dette grundlag.

Men, hvordan forholder det sig med den moderne kartografi? Og hvilke årsager er der til, at kartografien har udviklet sig til det den er i nyere tid? Og hvordan fremstilles kort i dag? Disse spørgsmål står for skud i det følgende.

At befolkningsantallet er kraftigt voksende, at industrien er i stadig udvikling og at teknologien har samme tendens, er enhver bekendt. I forhold til kartografi har disse faktorer sat klare spor på mindst to væsentlige områder:

- 1) Behovet for korts præcision er blevet stærkt forøget.
- 2) Det er blevet nemmere at fremstille kort både mængdemæssigt og af en bedre kvalitet.

For at forklare væksten i behovet for kort er begrebet planlægning et nøgleord. Det, at verdens indbyggertal vokser betyder, at økologiske sammenhænge bliver forskubbet, ofte i en for levende væsener uheldig retning. Fødevarerproduktion/-fordeling, energiforbrug/-fordeling og meget andet bliver ofte planlagt på internationalt niveau. Til dette brug fordres kort med egenskaber og indhold, der belyser de forhold og betingelser, der skal planlægges.

Et andet eksempel, hvor behovet for præcision er det væsentligste, er i "krigsapparatet". Dette er selvfølgelig også tilfældet i forbindelse med luftfart, hvor flyveruter skal være nøjagtige.

I vores moderne verden er information og informationsmængde centrale begreber. I denne sammenhæng bruges ofte kort, som hjælpemiddel til illustration af information (tænk blot på TV-avisen).

At de ovennævnte behov for kort er blevet nemmere at tilfreds-

stille kan primært begrundes med den teknologiske udviklings resultater.

Metoden, der bruges til fremstilling af kort, er principielt den samme som er brugt i århundreder, men der er sket en automatisering af de mest tidskrævende og præcisionskrævende aktiviteter. Derudover er de successive processer i kortfremstillingen også blevet automatiseret. Man kan f. eks. etablere en databank, der indeholder koordinater til punkter af områder på Jorden. Disse kan lagres på magnetbånd, hvorved de kan bruges gang på gang, og man kan derved beregne nye geografiske data såsom kystlængder, arealer og meget andet (endvidere kan man få en kortprojektionstype ud fra anden projektionstype, når der findes et matematisk forhold imellem dem).

Man har også opnået meget ved brugen af flyvemaskiner, satellitter, fotoapparater, film osv. til fremstilling af kort. Disse er alle produkter af det 20. århundrede, og er under stadig udvikling. Det har været til stor hjælp ved kortlægning af områder, specielt områder, der før har været utilgængelige på landjorden.

Den tekniske udvikling har også udmøntet sig i selve produktionen af kort, f. eks. er farvelægning og reproduktion både i antal og hurtighed blevet forbedret.

Da den teknologiske udvikling ikke forventes at stoppe nu og her, skulle det være antydnet, at kortproduktion fortsat vil undergå en rivende udvikling...

5. Konstruktioner.

Spørgsmålet om, hvordan du selv kan fremstille kort, er dette afsnits hovedopgave at besvare.

I de forrige afsnit har vi læst om projektioner, der bliver udført enten på en tangentplan til en globus, eller på en kegle der er tangentflade til en breddebue, eller på en cylinder der er tangentflade til en storcirkel (ækvator).

Det er klart, at man hverken kan folde et kæmpe-stort papir rundt om jordkloden, og anvendelsesmuligheden af et sådant enormt kort ville være fuldstændig negligerbar. Der er åbenbart brug for en nedskalering af Jordens størrelse.

Selv om man har "en mindre udgave" af jordkloden, sætter man som regel ikke en lyskilde i kuglens centrum for at tegne skygebilleder på et stykke papir.

Vi vil ikke beskrive de forskellige eksisterende metoder, men vi vil prøve at skaffe os en idé om metoder, der ligger bag. Man kan erhverve bredde- og længdegraderne til ethvert punkt på jordoverfladen. Det betyder, at hvert punkt kan indtegnes på et stykke papir, hvis man har "et velegnet koordinatsystem" til sin rådighed.

Det handler da om at få tegnet længde- og breddebuesystemet. Derefter kan man plotte et passende antal punkter, så man kan få indtryk af områdernes form og dermed få et fuldbyrdet kort.

Det, vi vil beskæftige os med i det næste afsnit, er netop at tegne bredde- og længdebuesystemet for de enkelte projektioner.

5.1. Gnomonisk projektion.

5.2. Geometrisk konstruktion.

Tegn en cirkel der forestiller jordkloden i overensstemmelse med en valgt skala (se evt. kapitel 3.0.). Tegn ækvator, polaksen og en breddebue (f. eks. $\varphi = 75^{\circ}\text{N}$).

Lad os tænke os en tangentplan til Nordpolen, der ombøjes 90° således, at vi kan tegne på halvdelen af den, se figur 69.

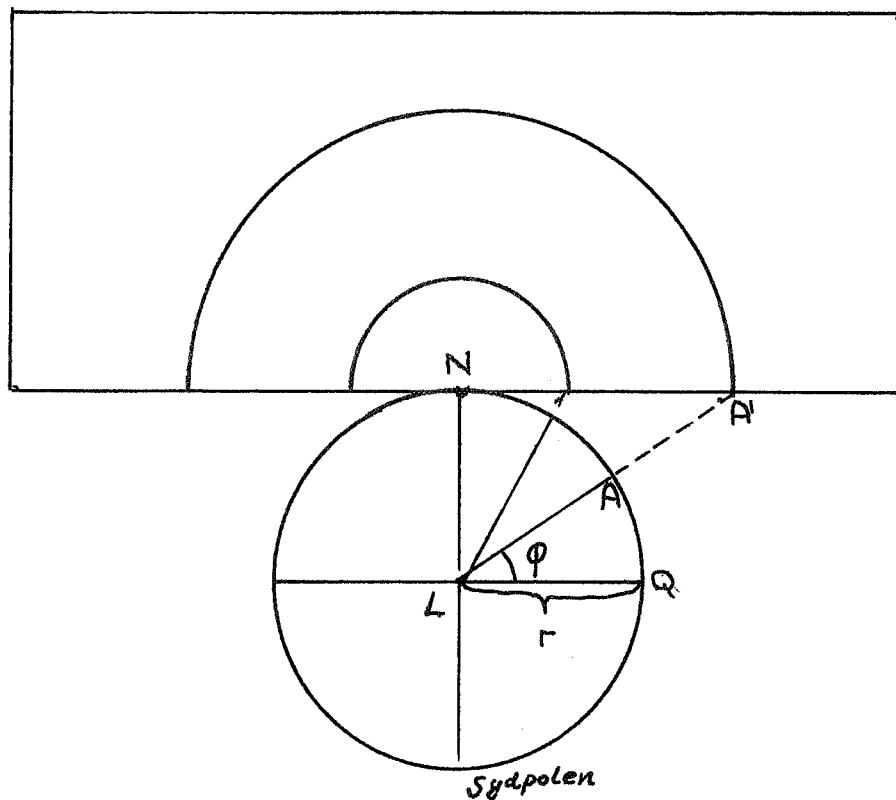


Fig 69: Skitseret model af den gnomoniske azimuthal-projektions konstruktion.

Hvor på tangentplanen ligger sigtepunktet? Tegn det til punkt A (som vist på fig. 69) svarende billede, som kaldes A' .

På den måde (med lineal) har vi bestemt $\text{dist}(N, A')$, som er radius i cirklen, der svarer til breddecirklen med graden φ (se fig. 69).

Konstruer da cirklen med radius = $\text{dist}(N, A')$ og centrum i N. Frembring derefter andre breddebuers billeder på analog vis. Længdebuerne bliver projiceret som rette linjer radialt ud fra N. Tegn nogle af disse.

5.3. Trigonometrisk konstruktion.

På fig. 69 ser vi, at $\cot \varphi = \frac{\text{dist}(N, A')}{r}$ eller $\text{dist}(N, A') = r \cot \varphi$ (indse lige det!). Dette betyder, at når vi kender breddegraden φ , kan vi beregne den tilsvarende radius i billedcirk-

len og derved tegne den pågældne breddecirkels billede. Længdebuerne bestemmes på samme måde som i den geometriske konstruktion. r er som bekendt globens radius.

5.4. Orthografisk projektion.

5.5. Geometrisk konstruktion.

Tegn en plan cirkel, der repræsenterer jordkloden/en globus. Tegn ækvator, polaksen og breddebuen φ . Vi skal også bruge en tangentplan til Nordpolen som tænkes foldet 90° , sådan at vi kan tegne på den (se fig. 70).

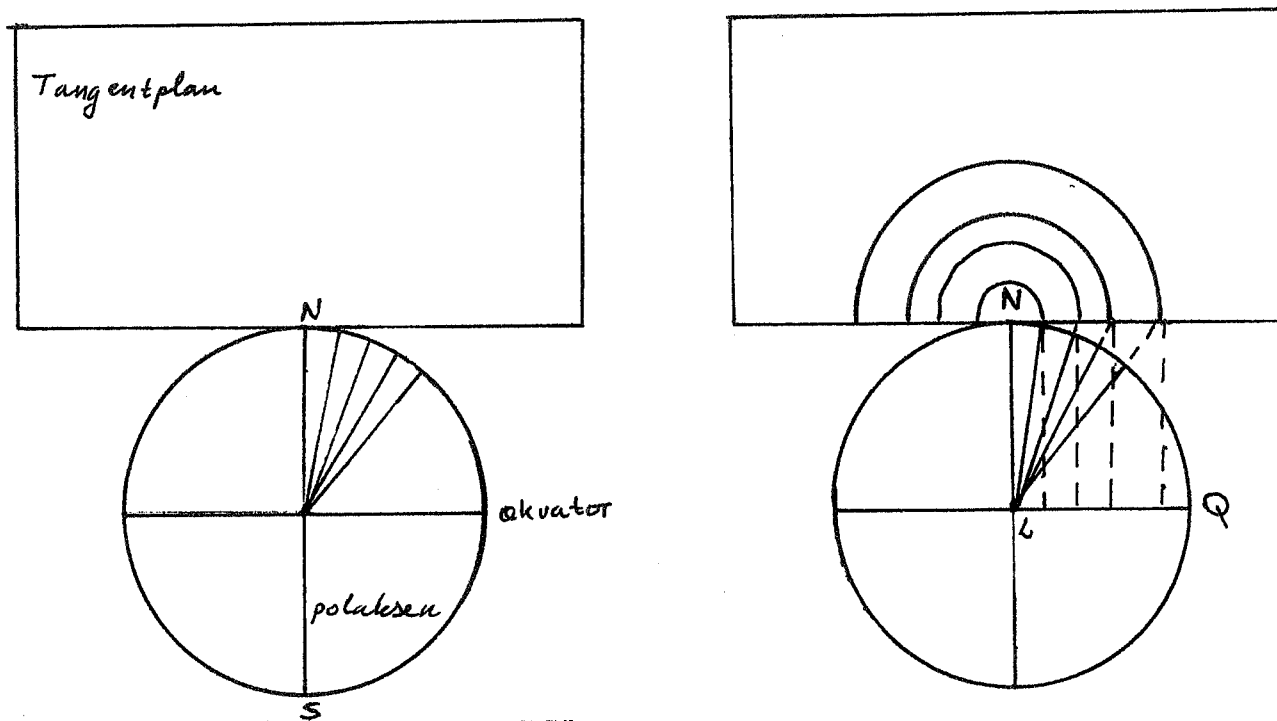


Fig. 70: Skitserede modeller af den ortografiske projektions konstruktion.

Bestem hvor på tangentplanen sigtepunktet ligger ved denne projektion. Tegn så bredde- og længdebuerne på tangentplanen. Derved fås fig. 70.

5.6. Trigonometrisk konstruktion.

Find et trigonometrisk udtryk for radierne i de "projicerede" breddecirkler, som er vist på fig. 70.

Beregn derefter radierne i billedcirklerne svarende til bred-

degraderne 90° , 80° , 70° , 60° , 50° og 0° .

Redegør for en metode til at konstruere projektionens billede (og frembring eventuelt et kort).

5.7. Centralcylindrisk projektion.

5.8. Geometrisk konstruktion.

Konstruer en plan cirkel, der repræsenterer Jorden. Tegn ækvator, polaksen og breddebuen svarende til breddegraden φ . Tegn en cylinderfrembringer og derefter en plan, som vist på fig.

71. Lad l være nulmeridianens billede.

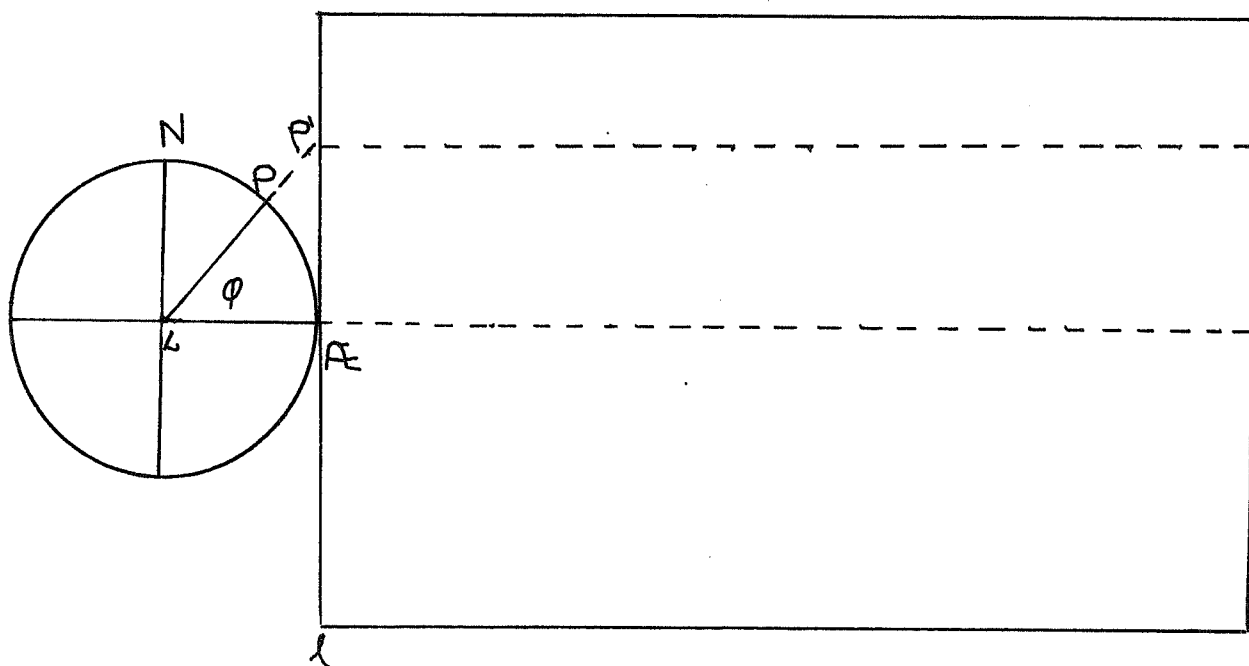


Fig. 71: Skitseret model af den centralcylindriske projektion.

Hvor på figuren ligger projektionens sigtepunkt? Tegn på planen det til breddebuen med graden φ svarende billede. Tegn billedet af andre breddebuers billeder. Kan polerne repræsenteres? Tegn derefter længdebuernes billeder.

5.9. Trigonometrisk konstruktion.

Find et trigonometrisk udtryk for afstanden $\text{dist}(\mathcal{E}, P')$ og beskriv en konstruktionsmetode på dette grundlag.

5.10. Arealbevarende cylindrisk projektion.

5.11. Geometrisk konstruktion.

Tegn en cirkel, der repræsenterer Jordkloden/en globus. Tegn ækvator, polaksen og breddebuen med graden φ . Tegn en plan, der fremkommer ved at udfolde en tænkt cylinderflade, der tanger ækvator (fig. 72)

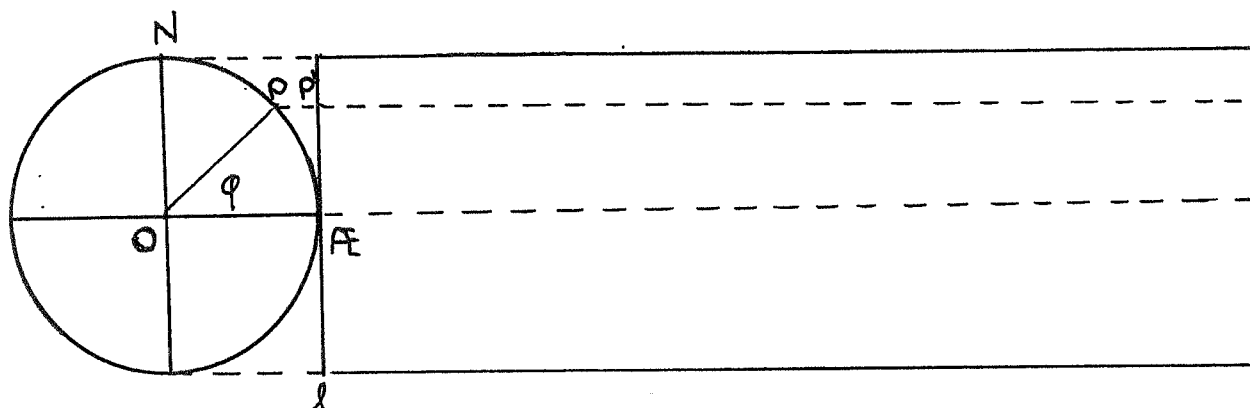


Fig. 72: Skitseret model af den arealbevarende cylindriske projektion.

Tegn på planen det til breddebuen med graden φ svarende billede. Tegn billedet af andre breddebuer. Kan polerne repræsenteres? Hvordan? Angiv derefter længdebuernes billeder på kortet.

5.12. Trigonometrisk konstruktion.

Find et trigonometrisk udtryk for afstanden $\text{dist}(A, P')$ i overensstemmelse med betegnelserne fra fig. 72. Redegør derefter for en fremgangsmåde til at fremstille et kort ud fra trigonometriske overvejelser (som ovenfor).

5.13. Simpel perspektiv kegleprojektion.

5.14. Geometrisk og trigonometrisk konstruktion.

Fig. 73 viser en repræsentation af Jorden med en kegle som en tangentflade ved breddegraden φ .

Udtryk $\text{dist}(N', S)$ ved $\text{dist}(L, S) = r$ og φ . Når vi nu kender $\text{dist}(N', S)$, kan vi tegne standardbreddebuen med N' som centrum. N' er jo netop Nordpolens billede ved projektionen.

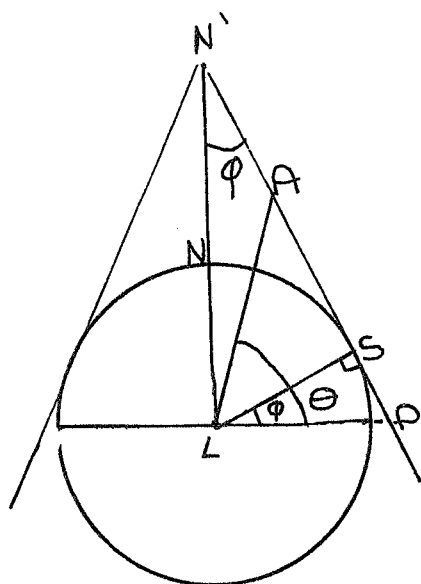
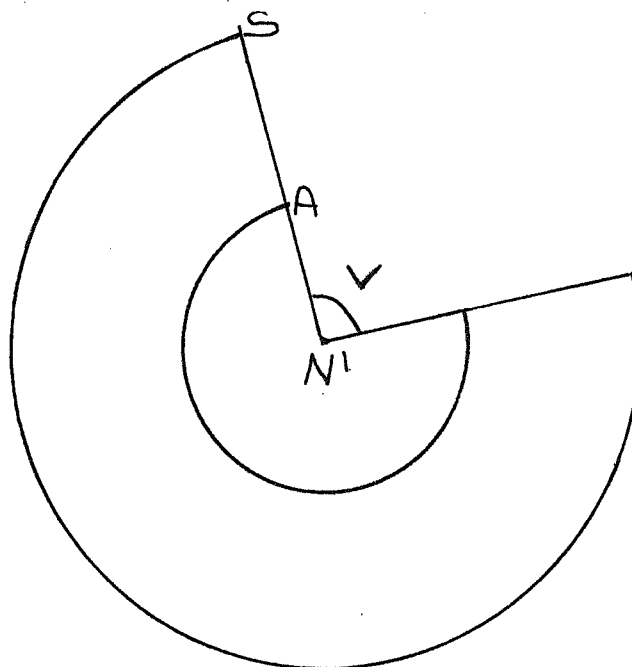


Fig. 73: Repræsentation af jordklo- den med en kegle som tan- gentflade ved breddegrad- en ϕ .

Når vi klipper en kegle op, vil denne beskrive et cirkelbue- udsnit, som svarer til 360° på globen (fig. 74).

Fig. 74: En udfoldet kegle, svarende til fig. 73.



Altså vil 360 længdegrader på globen svare til 360° -v på fi- gur 74. Vi må altså beregne v .

Ifølge afsnittet om kegleprojektioner er $v = 360^\circ(1 - \sin\phi)$. Da vi kender $\text{dist}(N', S)$ og ϕ , kan vi tegne cirkeldelen svaren- de til standardbreddebuen.

Vælger vi f. eks. 10^0 som buemålet mellem længdebuer, deler vi cirkeldelen i 36 lige store dele ($360^0/10^0 = 36$). Herefter skulle det være muligt at tegne længdebuerne radialt ud fra N' .

Vi mangler nu at beregne afstanden mellem breddebuerne. Vi vælger f. eks. at tegne dem i spring af 10^0 .

Betragter vi et punkt A på keglen kan vi beregne $\text{dist}(N', A)$, når vi kender A's breddegrad θ . Dette er hensigtsmæssigt da vi således kender radius i denne breddebues billede på den udfoldede kegle. Der gælder jo at $\text{dist}(N', A) = \text{dist}(N', S) - \text{dist}(A, S)$, hvor $\text{dist}(A, S) = r \cdot \tan(\theta - \varphi)$.

Vi kan således bestemme radius til en vilkårlig breddebues billedcirkeldel. Tegn på det grundlag breddebuernes billeder.

6. Opgaver.

1) Eratostenes skønnede afstanden mellem Alexandria og Syene til 809.5 km. I Syene stod solen i zenith, dvs. strålerne var vinkelret med horisontplanen i Syene.

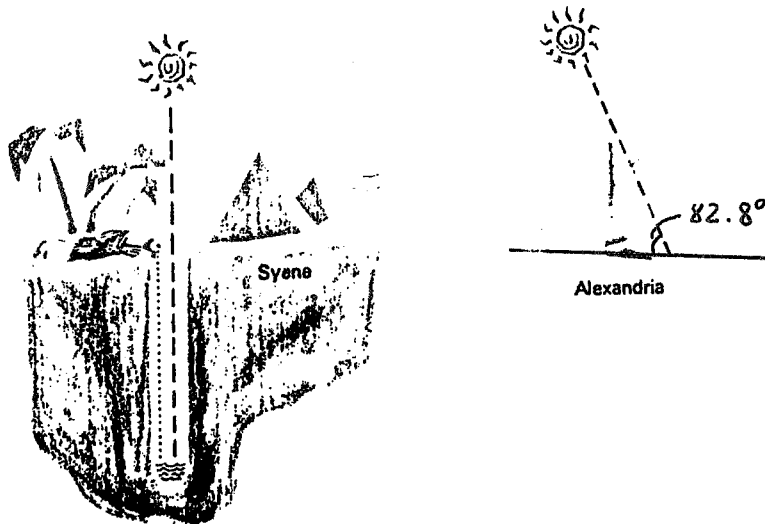


Fig. 75: Sakset fra Mathematics in a Changing World (1973) af Holt og Marjorams.

I Alexandria dannede solstrålerne en vinkel med horisontplanen på 82.8° . Hvor stor bliver Jordens omkreds, når man antager, at Jorden er kugleformet?

2) Vi kan forestille os, at vi med en målekæde på 100.00 m har målt afstanden mellem punkterne A og B til 5,000 m, ($\text{dist}(A,B) = 5,000 \text{ m}$). Beskriv hvorledes man kan beregne de øvrige afstande: $\text{dist}(B,C)$, $\text{dist}(A,C)$, $\text{dist}(A,D)$, $\text{dist}(B,D)$. Prøv med brug af en vinkelmåler at bestemme nogle af disse afstande. Prøv også at fastlægge målestoksforholdet.

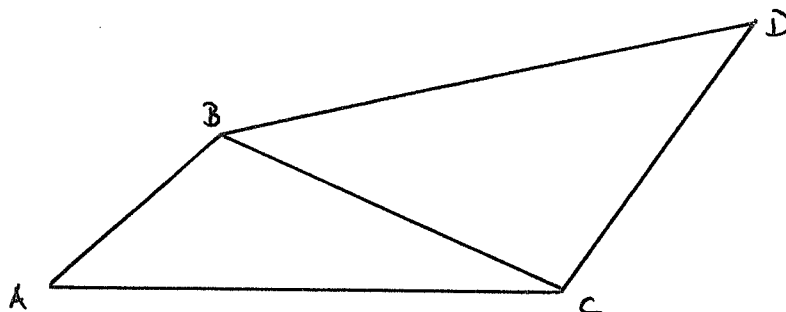


Fig. 78: Nedskaleret del af opmålingsområde.

3) Det er sagt i teksten, at man udfra klokkesletsangivelser for observationer af Jupiters måner i bestemte faser kan bestemme en længdegrad på Jorden. Thomas Bugge observerede Jupiters ene drabant (måne) i en bestemt fase kl: $12^{\circ}48'39''$. Den samme observation blev i Paris registreret kl: $12^{\circ}07'31''$. Hvad bliver længdegraden for Rundetårn, når længdegraden gennem Paris sættes til 0° ?

4) Byerne Pittsburg og Peking ligger på samme breddebue. Deres længdegradspositioner er $180^{\circ}V$ henholdsvis $116^{\circ}Ø$. På en globus med diameter lig 60 cm ønskes afstanden langs den fælles breddebue bestemt. Breddegraden sættes til $40^{\circ}N$. Dernæst ønskes den sfæriske afstand mellem byerne bestemt.

5) Ved brug af den sfæriske cosinusrelation: $\cos x = \sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta \cos \alpha$, beregnes afstanden mellem:

- a) Julianehåb i Grønland ($60^{\circ}50'N, 46^{\circ}10'V$) og Kapmonis Jesup i Grønland ($83^{\circ}37'N, 35^{\circ}0'V$).
- b) Porto Algre i Brasilien ($1^{\circ}20'S, 48^{\circ}30'V$) og Belem i Brasilien ($1^{\circ}20'S, 48^{\circ}30'V$).
- c) København ($55^{\circ}42'N, 12^{\circ}35'Ø$) og Mallorca ($39^{\circ}30'N, 3^{\circ}0'Ø$).
- d) Bombay i Indien ($19^{\circ}0'N, 72^{\circ}50'Ø$) og København.

6) På en globus gælder følgende:

- Breddecirklerne er parallelle.
 - afstanden mellem breddecirklerne er den samme. Dvs. hvis vinkelforskellen er den samme, er afstanden mellem breddebuerne (målt på længdebuerne) den samme.
 - Længdecirklerne mødes i polerne.
 - Bredde- og længdebuerne skærer hinanden vinkelret.
- a) Undersøg for den ortografiske projektion hvilke af disse egenskaber der bevares.
 - b) Gør det samme for Mercatorprojektion.
 - c) Gør det samme ved en kegleprojektion.

7) Meget ofte bliver der brugt planprojektioner for områder over polaregnene, kegleprojektioner for områder beliggende i de tempererede egne og Mercatorprojektion for områder nær

ækvator. Find på en globus Brasilien og Grønland. Find de samme lande på et verdenskort, der er fremkommet ved en Mercatorprojektion. Sammenlign deres størrelse.

8) Prøv selv at fremstille en kortprojektion. Du kan f. eks betragte en cylinder "presset" gennem en globus/kugle som vist på fig. 77.

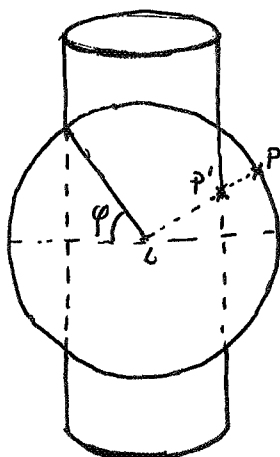


Fig. 77: En model af Gall's cylinderprojektion.

Hvis cylinderen tænkes anbragt med Nord- og Sydpolen på cylinderens rotationsakse, hvad er da antagelig den bedste værdi af φ ? Hvilke områder afbildes bedst? Bevarer projectionen nogle væsentlige egenskaber?

7. Litteratur- og referenceliste.

- T.W. Birch: Maps Topographical and Statistical
Oxford University Press, 1964
- Bo Bramsen: Gamle Danmarkskort
København, 1965
Grønheft Pedersens Forlag
- Lloyd A. Brown: The Longitude, 1951
fra The World of Mathematics
(by J.R. Brown)
London, 1956
- G.C. Dichinson: Maps and Air Photographs
Arnold, 1979
- Michael Holt +
D.T.E. Marjorams: Mathematics in a Changing World
London, 1973
- Børge Jessen: Lærebog i geometri
København, 1945
- Jan Jonasson et al.: Kartan och verkligheten
Stockholm, 1974
- Ib Kejlbo: Historisk kartografi
København, 1966
- George P. Kellaway: Map Projections
London, 1946
- Morris Kline: Mathematics in Western Culture
Oxford University Press, 1970
- Mogens Esrom Larsen: Den korteste vej mellem to punkter
på et landkort
Naturens Verden, 5-6, 1984

- Porter W. McDonell, Jr.: Introduction to Map Projections
Marcel Dekker, 1979
- Keld Nielsen: Hvordan Danmarks kortet kom til at
ligne Danmark
Århus, 1982
- Erwin Raisz: General Cartography
McGraw-Hill Book Comp., 1948
- Tor F. Rasmussen: Kartlære
Universitetsforlaget, 1963
- Francois Reignier: Les systemes de projection
Paris, 1957
- Arthur Robinson et al.: Elements of Cartography
John Wiley & Sons, 1978
- J.A. Steers: An Introduction to the Study of
Map Projections
University of London Press, 1970



BEGRUNDELSE FOR MATEMATIKUNDERVISNINGEN.

Vores overordnede udgangspunkt for dette projekt er, at matematik har indflydelse på verdens udvikling i dag.

Faget matematik spiller en væsentlig rolle p.g.a. dets direkte anvendelse i det praktiske liv, men også indenfor flere videnskaber har matematik åbnet mange muligheder.

Betragter vi vores samfundsudvikling, fremgår det, at teknologien og dermed matematikken får en stadig større indflydelse. Da vi samtidig mener, at alle bør have en indsigt i og en indflydelse på, hvordan samfundet formes, er det nødvendigt, at matematik vægtes som (et af de væsentligste) fag i gymnasiet.

Et spørgsmål er så, hvad eleverne bør kunne bruge faget matematik til, og dermed hvilke mål, der bør sættes for matematikundervisningen.

Vi mener, at eleverne bør lære at gennemskue hvor og hvordan matematikken anvendes, hvilket er ensbetydende med, at de bør kunne forstå hvilke muligheder og begrænsninger matematikken skaber og dermed have kendskab til matematikkens natur og historiske udvikling.

Det er selvsagt, at med de rammer matematikundervisningen har i dag, det gælder såvel fagopsplitning og timetal som penge-nød, vil det være umuligt at opfylde vores mål fuldt ud. Dog vil en ændring i undervisningens indhold kunne råde bod på nogle af de problemer, som i dag forfølger matematikundervisningen i gymnasiet.

Et udkast til den by bekendtgørelse for den matematiske linje i faget matematik som udsendtes i marts 1984, må dog siges at være et skridt på vejen til et forbedret indhold i matematikundervisningen set ud fra vores understregede målsætning.

I bekendtgørelsen står bl.a., at undervisningen skal indeholde flg. fire aspekter:

1. Et datalogiaspekt.
2. Et historisk-filosofisk aspekt.

3. Et modelaspekt.

4. Matematik som erkendelsesform.

Under aspekt 2 står: "Eleverne skal opnå kendskab til dele af matematikkens historie og matematik i kulturel, filosofisk og samfundsmæssig sammenhæng". Under aspekt 3 står: "Undervisningen skal give eleverne kendskab til opbygning af matematiske modeller som idealiserede repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger". Under aspekt 4 står: "Eleverne skal opnå forståelse af matematisk erkendelses særlige natur." Disse eksempler på krav til undervisningens indhold mener vi, illustrerer en udvikling, som nærmer sig vores målsætning.

I forslaget til den ny bekendtgørelse inddeles undervisningens indhold i nogle hovedemner, hvoraf det ene er "geometri", hvis rolle med hensyn til vores målsætning med matematikundervisningen vi har forsøgt at belyse. Når vi netop har valgt hovedemnet "geometri", ligger forklaringen i flg.:

1. Omkring dette emne og dets indhold hersker uklarhed, hvad såvel artikler som referater fra forskellige konferencer illustrerer.

2. Den ny bekendtgørelse har en meget vag forestilling om, hvilke problemer, man kunne tage op i forbindelse med emnet geometri. Det ses af, at der i modsætning til de andre emneområder ikke er givet nogle konkrete forslag.

GEOMETRIENS ROLLE I MATEMATIKUNDERVISNINGEN.

Der er givet mange bud på, hvad geometri betragtet som undervisningsfag er velegnet til at belyse om faget matematik. Disse bud kan efter vores opfattelse inddeles i flg. 6 punkter:

1. Geometri kan belyse matematikkens opbygning og indre virkemåde. Dvs. geometri kan illustrere den syntetisk-axiomatisk-deduktive tankegang. Konsekvensen heraf har været, at man gennem århundreder har undervist i Euklidsk geometri og oftest med den begrundelse, at optræne eleverne i at tænke systematisk og i at mestre matematisk bevisførelse.

2. Geometri kan belyse matematikkens historie og videnskabs-teoretiske udvikling. Dvs. geometriens historie, på grund af disciplinens hyppige optræden som motor ved matematiske inno-

vationer, vil være velegnet til at illustrere matematikkens historie. En konsekvens heraf bliver, at elever skal lære at forstå de tankegange, matematikere - og andre - i tiderne har gennemlevet. Altså at eleverne skal sætte sig ind i og gennemleve problemstillinger, som personer i historien har beskæftiget sig med.

3. Geometri kan fungere som "praktisk redskabstaske". Dvs. geometri kan anvendes til at navngive, beskrive og beregne på ting, der eksisterer. En konsekvens heraf bliver, at eleverne opøves til via formler og målemetoder at geometrisere deres virkelighed i former, som plane og rumlige figurer. Denne metode er i vid udstrækning benyttet på ingeniørakademier og teknika samt i mange gymnasier landet over.

4. Geometri kan fungere som problemløser ved selvvirksomhed. Da geometri, sammenlignet med andre discipliner indenfor matematikken, rummer mange forankringer i forhold til omverdenen, vil geometri som problemløser åbne muligheder for selvvirksomhed. En konsekvens heraf bliver, at elever kan lære at omsætte problemer fra dagligdagen, til geometriske problemer, som de derved skulle være i stand til at løse.

5. Geometri kan fungere som model og/eller for forekomster/begivenheder i det fysiske rum. Det er i mange tilfælde svært at skelne mellem geometri og virkelighed. Eksempelvis er Euklidsk geometri matematik og ikke virkelighed, men opfattes af mange - med rette - som udsagn om virkeligheden. For at beskrive virkeligheden simplificeres denne ofte, således at det bliver muligt via et matematisk system at udsige nogle påstande om det fysiske rums sammensætning. Når geometri er et oplagt beskrivelsesmiddel, skal det ses i sammenhæng med, at netop dette emneområde ofte opfattes som den del af matematikken, der har tættest tilknytning til virkeligheden. Konsekvensen bliver, at undervise i geometrier, som kan bruges til beskrivelse af virkeligheden, og dermed lette forståelsen for det fysiske rums sammensætning.

6. Geometri kan fungere som middel til opøvelse af den psykologiske rumsans. Dvs. geometri har evnen til at gøre mere eller

mindre imaginære figurer eller lignende sansbare og forståelige. Konsekvensen bliver eksempelvis, at få eleverne til at forstå (rumligt) afbildninger i planen af 3-dimensionale figurer.

Disse seks punkter skulle gerne illustrere, at der kan eksistere mange forskellige synspunkter, når det gælder hensigten med geometriundervisningen, og disse synspunkter giver hver især anledning til forskellige pædagogiske og didaktiske strategier. Punkt 1 bevirker, at bevisførelse vil blive en væsentlig del af geometriundervisningen. Under punkt 2 vil geometriundervisningen hovedsagelig blive centreret omkring historisk matematik. Punkt 3 og 4 lægger op til en meget praktisk orienteret undervisning, hvor såvel matematikkens indre natur som historiske udvikling er underordnet, hvorimod punkt 5 udover dette kræver en dybere forståelse for, på hvilket grundlag sætninger, beviser og definitioner opbygges, hvis eleverne skal blive i stand til at anvende sådanne i forbindelse med forekomster og begivenheder i det fysiske rum.

De didaktiske konsekvenser med hensyn til de 6 punkter er imidlertid svære at vurdere, da såvel undervisningsform som lærerens indlevelse og virkemåde er faktorer, som har afgørende indflydelse.

Ovenstående illustrerer, at der kan være forskellige måder at undervise i geometri på, og at der nødvendigvis hersker forvirring om geometriens rolle i matematikundervisningen virker ikke forbavsende. Geometridebatten de senere år synes at vise, at de deltagende er splittet i to hovedlejre: Den ene gruppe består af personer som argumenterer for genindførelsen af Euklidisk geometri. Typiske argumenter for dette synspunkt er, at Euklidisk geometri er stringent opbygget og omhandler i modsætning til for eksempel matricer, vektorer og koordinater visuelle figurer, hvilket gør det muligt for eleverne selv at udføre beviser og slutte sig til løsninger, og dermed arbejde som "rigtige matematikere". Altså geometri kan belyse matematikkens opbygning og indre virkemåde.

Følgende personer er repræsentanter for disse synspunkter:

1) Edwin E. Moise, 1975, og 2) Bryan Lang and Peter Ruane, (se litt.-listen).

Den anden gruppe består af personer som hovedsagelig fokuserer på geometri som problemløser og middel til selvvirksomhed. Altså, geometri skal kunne bruges til at fortælle noget om elevernes hverdag. Dette synspunkt ses såvel i en artikel af A. J. Bishop som i en artikel af H. J. Vollrath. Typisk for disse artikler er, at der gives mange bud på, hvor i elevernes hverdag geometrien optræder, men både pædagogiske og didaktiske konsekvenser bliver kun løseligt behandlet.

Også herhjemme hersker der uklarhed om geometriens rolle i matematikundervisningen, hvad forslaget til den ny bekendtgørelse er et godt eksempel på. Formålsformuleringen i forslaget til den ny bekendtgørelse er den samme som i bekendtgørelsen fra 1971 nemlig: "at eleverne erhverver sig indsigt i matematik som erkendelsesform og som beskrivelsesmiddel". Denne formålsformulering må siges at være meget bredt formuleret og en nærmere præcisering er nødvendig ved tilrettelæggelse af undervisningen.

Alle tre mat-linjer har som tidligere nævnt bl.a. hovedemnet "geometri", og når dette emne er udvalgt, må forklaringen være at geometri kan byde på noget i forbindelse med formålsformuleringen. I bekendtgørelsen nævnes, hvilke emner man skal medtage i forbindelse med emnet geometri, og for alle tre linjer er det som i 1971 den analytiske plangeometri og trigonometrien som vægtes plus vektorregning for mat-fys linjen.

Af væsentlige ændringer i pensum indenfor geometri set i forhold til bekendtgørelsen fra 1971 skal nævnes følgende:

Der skal for alle tre linjer som noget nyt undervises i et geometrisk emne af omfang 10 - 15 undervisningstimer. Vektorregning er gledet ud for mat-nat- og mat-sam-linjen. Af analytisk rumgeometri skal medtages følgende:

"Analytisk beskrivelse af punktmængder i rummet, herunder ret linje, plan og kugleoverflade. Afstand, vinkel og skæring mellem to punktmængder i rummet". Det hedder endvidere i kom-

mentarerne til emnet geometri, at "elevernes evne til at forestille sig rumlige figurer udvikles og opøves. Det skal omtales, hvorledes en række begreber kan generaliseres til højere dimensioner. Det er dog ikke tanken, at det generelle vektorrumsbegreb skal indføres".

Indførelse af rumgeometrien samt undervisning i 10 - 15 timer i et geometrisk emne må siges at være en styrkelse af geometriindholdet i matematikundervisningen. Problemet er bare, at udover de nævnte meget løselige kommentarer til emnet gives der intet egentligt bud på, hvilke emner man eventuelt kunne tage op i forbindelse med rumgeometrien eller de 10 - 15 undervisningstimer. Kun for mat-nat- og mat-sam-linjerne nævnes overordnede emner som vektorregning i planen og betragtninger af figurer i forbindelse med de 10 - 15 undervisningstimer.

Vi kan altså konkludere, at man i den ny bekendtgørelse har valgt at styrke geometriindholdet i matematikundervisningen, og det via den analytiske geometri, men hvilket mål dette valg skulle føre til, er man på ingen måde afklaret overfor.

VORES SYN PÅ GEOMETRIUNDERVISNINGEN.

Efter således at have antydnet typiske træk ved de senere års geometridebat, samt omtalt geometriens rolle i matematikundervisningen i de danske gymnasier, vil vi i det følgende diskutere vores 6 forslag om, hvad geometri kan bruges til for derefter at give vores bud på, hvilken rolle geometri bør indtage i gymnasiet, sammenholdt med vores målsætning for matematikundervisningen.

1. Geometri kan Belyse matematikkens opbygning og indre virkemåde. Vi mener ikke dette punkt er specielt væsentligt i forbindelse med geometri. Andre områder indenfor matematikken vil kunne vise dennes opbygning og virkemåde. Bevisførelse indenfor den syntetisk axiomatisk-deduktive tankegang vil derfor ikke alene kunne begrunde geometriens indførelse i matematikundervisningen.

2. Geometri kan belyse matematikkens historiske og videnskabs-teoretiske udvikling. Det er vigtigt at belyse matematikkens

historiske og videnskabsteoretiske udvikling. Dette kan imidlertid foregå ved gennemgang af andre discipliner end lige netop geometri, og punkt 2 som enestående kan derfor ikke begrunde geometriens berettigelse.

3. Geometri kan fungere som "praktisk redskabstaske". Det er vigtigt, at eleverne opøves til at kunne geometrisere deres virkelighed. Dog er det væsentligt, at eleverne ikke kun opøves til at kunne opfatte geometri som en "praktisk redskabstaske", altså at man ikke kun vægter teknisk matematik, da konsekvensen dermed bliver, at eleverne mister den dybere forståelse for, hvordan og på hvilket grundlag formler, målemetoder osv. er fremkommet.

4. Geometri kan fungere som problemløser ved selvvirksomhed. Vi mener, at geometrien i forbindelse med punkt 4 har sin klare force sammenlignet med andre emneområder indenfor matematikken, hvilket skyldes, at de intuitive forankringer er stærkere i geometri sammenlignet med andre matematiske discipliner.

5. Geometri kan fungere som model og/eller teori for forekomster i det fysiske rum. Dette punkt er væsentligt, da eleverne ofte stilles overfor situationer, hvor geometri anvendes på virkeligheden, hvorfor det er vigtigt at vise, hvordan denne anvendelse finder sted, og hvilke konsekvenser denne anvendelse medfører. Altså lære dem at opdage og vurdere matematikkens indflydelse på den verden vi lever i.

6. Geometri kan fungere som middel til opøvelse af den psykologiske rumsans. Rumgeometrien er et velegnet middel til opnåelse af dette punkt, og da figurer, tegninger, fotografier osv. indgår på utrolig mange måder i elevens hverdag vil geometrien netop her have sin klare force.

Vores uddybning af de seks punkter illustrerer at geometri er velegnet til at belyse mange sider indenfor faget matematik. Men der er altså punkter, hvor geometri sammenlignet med andre emneområder besidder nogle helt specielle egenskaber, nemlig i forbindelse med punkterne 5, 6, 3 og 4. (Punkterne 3 og 4

kan ses som følger af punkt 5.) Vores synspunkt er, at geometriens rolle i matematikundervisningen hovedsagelig bør være, at fortælle noget om matematikkens anvendelse i hverdagen og omegn.

Efter således at have konkluderet, hvad geometrien er velegnet til - set i sammenhæng med vores målsætning for matematikundervisningen - er næste skridt - underlagt bekendtgørelsens rammer - at give et bud på hvilke emner, der kunne være relevante at behandle i gymnasiet indenfor geometri.

De fire punkter vi har vægtet, sætter nogle begrænsninger for emnevalg. Punkt 6 indbyder til en inddragelse af rumgeometrien. Punkt 5 bevirker, at man beskæftiger sig med geometri, som anvendes til beskrivelse af virkeligheden eller dele heraf. For at punkt 3 og 4 skal kunne inddrages, er det vigtigt, at vi tager udgangspunkt i noget eleverne har kendskab til, altså noget som har tilknytning til deres hverdag.

Mange emner vil kunne vælges til opfyldelse af vores målsætning. Vi har valgt "kortprojektioner", og det skal altså ikke opfattes som den eneste mulighed.

BEGRUNDELSE FOR EMNEVALG.

Vi mener kortprojektioner er et velegnet område af flere grunde. Landkort er noget alle kender og anvender i flere sammenhænge, og det er derfor rimeligt, at få et kendskab til, hvordan disse fremstilles. Interessant i forbindelse med landkort er, at mange ofte anvender disse uden at tænke over, at det faktisk er umuligt at afbilde jordkloden på en plan, og at alle landkort derfor har visse mangler. Da matematik danner grundlaget for fremstilling af forskellige typer af kortprojektioner, er dette emne et godt eksempel på, hvordan matematik ubemærket indgår i elevens hverdag.

Sammenholdt med punkt 5 er kortprojektioner et godt eksempel på, hvordan geometri anvendes, som model for det fysiske rum. Her tænkes på den tilnærmelse, som finder sted ved at betragte jordkloden som en kugle. Ved dernæst at betragte forskellige typer af kortprojektioner, som alle i en eller anden

form er en misvisende beskrivelse af en kugleoverflade, vil eleverne desuden se, hvorledes en model behandles med geometri, og hvilke konsekvenser dette medfører. Eleverne vil her ved opøves i at gennemskue en bestemt matematisk models præmisser, og dermed hvilke informationer og mangler denne indeholder, og punkt 6 vil herigennem blive behandlet, idet man ved at betragte forskellige typer af kortprojektioner stifter bekendskab med rumlige geometriske figurer og deres geometriske egenskaber. Ved beskrivelse af forskellige typer af kortprojektioner vil punkt 3 uungåeligt berøres, idet trigonometri vil indgå som en "praktisk redskabstaske". Punkt 4 vil også være oplagt i forbindelse med emnet kortprojektioner, idet der kræves en meget lille baggrundsviden til forståelse af, hvorledes forskellige typer af kortprojektioner er fremkommet, hvilket betyder, at eleverne selv vil få mulighed for at kunne vurdere, i hvilke sammenhænge disse kan anvendes. Endvidere er kartografiens historie et interessant eksempel på, hvordan fag som matematik, fysik, geografi og astronomi og deres udvikling har haft betydning for udarbejdelsen af kort, og punkt 2, som jo også er en side ved matematikken, der er væsentlig at inddrage, vil uundgåeligt blive berørt. Altså emnet kortprojektioner besidder utrolig mange muligheder for både at antyde matematikkens anvendelse, og at aktivere elever til selv at konkludere noget om matematikkens muligheder og begrænsninger.

At sammenholde emnet kortprojektioner med punkterne 3, 4, 5 og 6 kan resultere i en bestemt pædagogisk og didaktisk strategi, nemlig: en undervisningsform, som er matematisk stringent, men som vægter den mere praktisk betonedede matematik, og som aktiverer eleverne (det kan være via gruppearbejde) til selv at slutte sig til, hvor og hvordan matematikken anvendes, og hvilke konsekvenser dette resulterer i. Dette betyder, at den syntetisk axiomatisk-deduktive undervisningsform får en underordnet betydning, og bevisførelse vil hovedsagelig kun anvendes, hvis dette kan underbygge tekstens indhold.

Alle disse overvejelser om hvorledes kortprojektioner kan

anvendes som emnelæsning i faget matematik i gymnasiet, har dannet grundlag for følgende materiale, som er vores konkrete bud på, hvordan geometri kan bidrage til at opfylde vores mål med matematikundervisningen.

Referencer til følgerapporten.

- Michael Atiyah: What is Geometry?
Mathematical Gazette, Oct. 1982.
- A.J. Bishop: Towards Relevance In the Teaching
of Geometry. Colloque Interna-
tional sur L'enseignement de la
Geometrie. Mons, Belgien, 31. aug.
- 2. sept. 1982. Mons 1982.
- Bryan Lang and
Peter Ruane: Geometry In English Secondary
Schools.
Edu. Stud. Math. no.1, 1981.
- Edwin E. Moise: The Meaning of Euclidian Geometry
In School Mathematics.
Mathematics Teacher, Oct. 1975.
- H.J. Vollrath: The Place of Geometry In Mathema-
tics Teaching: An Analysis of Re-
cent Developments.
Edu. Stud. Math. 7, 1976.
- Udkast til ny bekendtgørelse og undervisningsvejledning for
faget matematik på den matematiske linies matematisk-fysiske
gren.
Matematiklærerforeningen, marts 1984.
- Udkast til ny bekendtgørelse og undervisningsvejledning for
faget matematik på den matematiske linies natur- og samfunds-
faglige grene.
Matematiklærerforeningen, september 1983.



- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og Peter H. Lassen.
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Nr. 3 er a jour ført i marts 1984
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Nr. 4 er p.t. udgået.
Mogens Niss.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Nr. 5 er p.t. udgået.
Helge Kragh.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Nr. 7 er udgået.
B.V. Gnedenko.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarium".
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Nr. 12 er udgået
Mogens Brun Heefelt
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".
Else Høyrup.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMAL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality".
-
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE".
a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS".
Helge Kragh.
- 28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Krejnø.
Vejleder: Niels Boye Olsen.