



Studieretningsprojekt 2013/14

Elevens navn: Helena Clara Eiken	Klasse: 3x 08
----------------------------------	---------------

	Fag:	Vejleder:
Studieretningsfag på A-niveau	MA	GS Gert Schomacker
Fag på mindst B-niveau	FY	GS Gert Schomacker
Eventuelt 3. fag		

Område

Komplekse tal og vekselstrøm

Opgaveformulering

Der ønskes en kort oversigt over regning med de komplekse tal.

Gør rede for kompleks multiplikation, dels ved geometrisk konstruktion, dels ved hjælp modulus og argument. Eulers formel skal også omtales.

Gør rede for, hvordan man løser ligninger af formen $z^2 = a$, $z^3 = a$, ..., hvor a er et komplekst tal. Der ønskes en geometrisk illustration.

Beskriv, hvordan komplekse tal kan benyttes i forbindelse med vekselstrømskredsløb.

Der skal udføres forsøg med spole, kapacitor og delefilter til en højttaler, idet der lægges særlig vægt på kapacitoren.

Det forventes, at opgaven har et omfang svarende til ca. 20 normalsider.
(Indholdsfortegnelse, noter, litteraturliste, grafer, illustrationer etc. medregnes ikke i sidetallet).

Vejleders underskrift: _____

Jeg bekræfter herved med min underskrift, at opgavebesvarelsen er udarbejdet af mig. Jeg har ikke anvendt tidligere bedømt arbejde uden henvisning hertil, og opgavebesvarelsen er udfærdiget uden anvendelse af uretmæssig hjælp og uden brug af hjælpemidler, der ikke har været tilladt under prøven.

Elevens underskrift _____

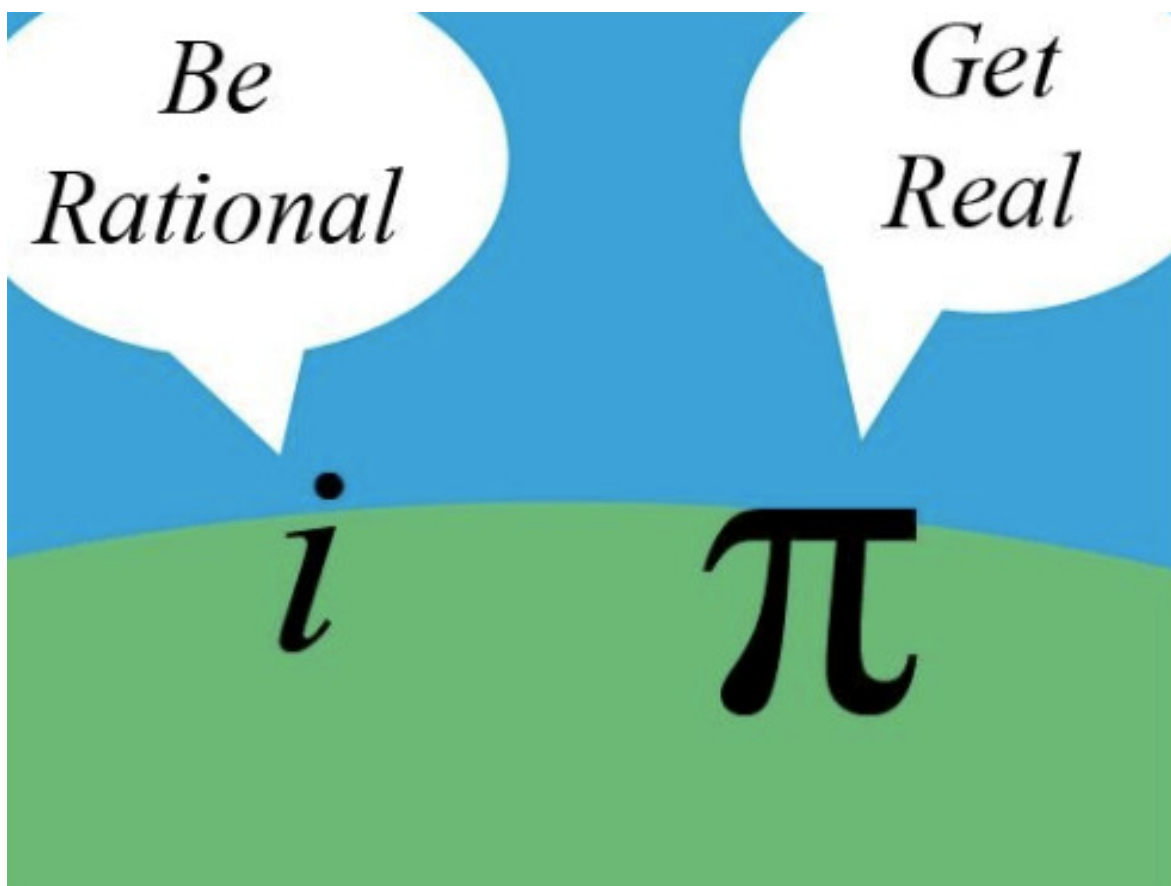
Opgaven udleveres d. 5/12 2013 kl. 14.00 i kantinen

Opgaven afleveres d. 19/12 2013 kl. 14.00 i 4 eksemplarer i adm. 2

Husk dette ark som forside i alle 4 eksemplarer

Komplekse tal og vekselstrøm

Studieretningsprojekt 2013



Matematik A & Fysik A

Vejleder: Gert Schomacker

Abstract

This paper explores the significance of complex numbers, which are an extension to our familiar real numbers. The complex numbers give us the opportunity to solve equations that we otherwise have to abandon. With knowledge of complex numbers it is possible to solve e.g. equations that are relevant in several physical applications. A complex number is composed of a real part and an imaginary part. The unit on the imaginary axis is denoted i or j and its square is -1 .

The paper examines several ways to write the complex numbers depending on which context they are used in and it explores calculations with the numbers (which are broadly conducted in the same way as with real numbers).

The study introduces complex numbers as pairs of real numbers, and later it is shown how it is possible to see the numbers in a two-dimensional coordinate system with a length and direction angle. The paper examines how to solve complex equations and it also includes Euler's formula. The complex numbers are especially useful in calculations on AC circuits to describe voltage, current and impedance, which we explore in three experiments with alternating current.

Opgavens indhold

ABSTRACT	2
OPGAVENS INDHOLD.....	3
1. INDLEDNING	4
2. GRUNDLÆGGENDE OM DE KOMPLEKSE TAL, $\mathbb{C}$:	5
INDFØRSEL AF DE KOMPLEKSE TAL - TALPAR	5
EN ANDEN SKRIVEMÅDE – REKTANGULÆRE KOORDINATER.....	6
AT REGNE MED KOMPLEKSE TAL.....	7
DET KOMPLEKST KONJUGEREDE TAL.....	8
3. KOMPLEKSE TAL GEOMETRISK.....	10
DEN KOMPLEKSE TALPLAN	10
POLÆRE KOORDINATER.....	10
EN TREDJE SKRIVEMÅDE – VHA. MODULUS OG ARGUMENT	11
MULTIPLIKATION MED POLÆRE KOORDINATER.....	12
MULTIPLIKATION VHA. DE MOIVRES FORMEL:	14
4. EULERS FORMEL	16
DEN KOMPLEKSE EKSPONENTIALFUNKTION	16
SAMMENHÆNG ML. DEN KOMPLEKSE EKSPONENTIALFUNKTION OG TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER	18
5. LØSNING AF LIGNINGER	20
DEN BINOME LIGNING	20
6. KOMPLEKSE TAL OG VEKSELSTRØM.....	24
VEKSELSTRØM.....	24
Kompleks vekselspændingsforskel, $\hat{U}$	24
Kompleks strømstyrke, $\hat{I}$	25
Kompleks impedans, Z	25
KAPACITOR	26
SPOLE (INDUKTOR)	28
DELEFILTER.....	29
7. VEKSELSTRØMSFORSØG.....	30
OPSTILLING 1: FORSØG MED EN SPOLE	30
Databehandling 1	30
OPSTILLING 2: FORSØG MED EN KAPACITOR.....	31
Databehandling 2	31
OPSTILLING 3: FORSØG MED ET DELEFILTER.....	31
Databehandling 3	31
8. KONKLUSION.....	33
9. LITTERATURLISTE.....	34
BILAG.....	35
1. BILAG: DEN KOMPLEKSE TALPLAN	35
2. BILAG: FORSØG 1; FORSØG MED EN SPOLE.....	36
3. BILAG: FORSØG 2; FORSØG MED EN KAPACITOR.....	37
4. BILAG: FORSØG 3; FORSØG MED ET DELEFILTER.....	39
SLUTNOTER	41

1. Indledning

I dag er tal blevet en så integreret del af vores hverdag, at det er svært at forstille sig én uden. Da man op gennem tiden har skullet løse forskellige problemstillinger i takt med naturvidenskabens udvikling, er tallene gradvist blevet udvidet, så vi i dag har:

De naturlige tal:	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots \infty\}$
De hele tal:	$\mathbb{Z} = \{-\infty \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots \infty\}$
Rationelle tal:	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0\right\}$
Reelle tal:	$\mathbb{R} = \{\text{alle tal på den reelle tallinje}\}$

Vi ser altså, at $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ved brug af ovenstående tal kan vi løse langt størstedelen af alle matematiske problemstillinger.

Ved løsningen af en andengradsligning lærer vi dog tidligt, at hvis diskriminanten er negativ, har ligningen ingen løsning. Dette problem opstår eksempelvis i ligningen $x^2 = -1$, da der intet tal findes, som ganget med sig selv giver et negativt tal. I nogle situationer kan det dog være meget nyttigt at kunne ”løse” denne og lignende ligninger. Dette bliver muligt ved udvidelse af talsystemets reelle tal til *de komplekse tal*, $\mathbb{C}$, hvor man indfører det ikke-reelle tal i . Tallet i har den egenskab at $i^2 = -1$.

Det kan umiddelbart virke underligt at indføre denne definition, for hvem har dog egentlig brug for at tage kvadratroden af -1. Det viser sig dog i beregninger med vekselstrøm, at man kan lette udregningerne en hel del ved at regne med komplekse tal, hvilket vi i opgaven vil se nærmere på i henhold til tre udførte forsøg med hhv. en spole, kapacitor og et delefilter i vekselstrømskredsløb.

Før vi går til vekselstrømmen, vil vi orientere os i de komplekse tal rent matematisk, samt lære hvordan man regner med dem.

2. Grundlæggende om de komplekse tal, $\mathbb{C}$:

Indførsel af de komplekse tal - talpar

De komplekse tal er som før nævnt en udvidelse af de reelle tal, som vi alle kender til. Mens de reelle tal kan findes som et bestemt punkt på en talakse (f.eks. en x-akse), markeres de komplekse tal derimod i et todimensionalt plan (et koordinatsystem med en x- og en y-akse).

Vi indfører nu de komplekse tal, z , som talpar bestående af to reelle koefficienter – opdelt i realdelen, a_1 (også kaldet $\text{Re}(z)$) samt imaginærdelen, a_2 (også kaldet $\text{Im}(z)$):

$$(2.1) \quad z \equiv (a_1, a_2) \mid a_1 \wedge a_2 \in \mathbb{R}$$

Ved at indføre følgende måder at addere samt multiplicere komplekse tal, opnår vi, at alle de basale regneregler for de reelle tal gælderⁱ.

$$(2.2) \quad \text{Addition: } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(2.3) \quad \text{Multiplikation: } (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

Vi vil nu vha. af (2.2) og (2.3) vise, at nogle af de sædvanlige regneregler for de reelle tal også gælder for komplekse tal. Ved f.eks. addition af tallet nul (nulelementet) til et reelt tal, fås det oprindelige reelle tal. Det gælder ligeså ved addition af nulelementet (0,0) til komplekse tal. Vi bruger (2.2):

$$(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2)$$

For at vise, at det ikke bare er et tilfælde, at ovenstående regneregler også gælder for komplekse tal, tager vi et eksempel mere. Lad os denne gang se, om den kommutative lov også gælder for multiplikation af komplekse tal. Vi sætter $a = (a_1, a_2)$ og $b = (b_1, b_2)$ og viser, at $a \cdot b = b \cdot a$:

$$\text{Venstre side:} \quad (a \cdot b) = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

$$\text{Højre side:} \quad (b \cdot a) = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1 \cdot a_1 - b_2 \cdot a_2, b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1)$$

Da vi ser, at højre side er lig venstre side, må den kommutative lov gælde for multiplikation af komplekse tal såvel som for reelle tal. På tilsvarende måde kan det vises, at de resterende aksiomer for det reelle tallegeme også gælder for komplekse talⁱⁱ, men det vil vi ikke gå i dybden med her.

Vi har altså nu indført et abstrakt legeme, om hvilket vi intet ved, udover at de seks aksiomer gælder for legemet. Som Jørgen Ebert skriver må vi nu ”forstille os, at vi er strandet på en øde ø kun medbringende seks stykker værktøj – de seks aksiomer. Ved hjælp af disse – og kun disse – er det vores opgave at udvikle de kendte regneregler”ⁱⁱⁱ. I det følgende ser vi nærmere på denne udvikling af tallegemet.

Den komplekse notation (2.1) kan også bruges til at opskrive almindelige reelle tal – f.eks. skrives det reelle tal 3 som (3,0). Dvs. tal, som ligger på vores almene tallinje har andenkomponenten nul og benævnes med R^* ^{iv}

$$(2.4) \quad R^* = (a, 0) \mid a \in \mathbb{R}$$

Alle de komplekse tal, som ikke tilhører R^* kaldes imaginære tal.

En anden skrivemåde – rektangulære koordinater

Når man skal regne med komplekse tal bliver notationen $z = (a_1, a_2)$ lidt besværlig at håndtere, og man har derfor valgt at indføre en anden måde at skrive samme tal uden brug af parenteser. Vi starter med at indføre *den imaginære enhed, i*:

$$(2.5) \quad i \equiv (0,1)$$

Ved at opløfte i i anden, får vi ved brug af regneregler (2.3), at:

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$$

$$(2.6) \quad i^2 = -1$$

Ved at multiplicere et reelt tal (f.eks. tallet 3) med den imaginære enhed i , fås et komplekst tal.

Dette ses ved anvendelse af (2.3):

$$3 \cdot i = (3,0) \cdot (0,1) = (3 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0,3)$$

Da vi lige har set, at $(0,3) = 3 \cdot i$ gælder det også, at $(0, a_2) = a_2 \cdot i$, og vi kan derfor udlede vha. (2.4) og (2.2), at:

$$z = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1 + i \cdot a_2$$

På baggrund af ovenstående indførelser kan vi nu skrive komplekse tal, z , uden brug af parenteser, men i stedet vha. den imaginære enhed i . Denne form kaldes rektangulær form:

$$(2.7) \quad z = (a_1, a_2) = a_1 + i \cdot a_2$$

Komplekse tal på rektangulær form gør det nemt at adskille hhv. den reelle og imaginære del.

At regne med komplekse tal

Vi har lært, hvordan man adderer samt multiplicerer komplekse tal *uden* den imaginære enhed i , og vi vil nu vise, at de samme regnereglerne også gælder for komplekse tal skrevet *med* i .

Addition; $z_1 + z_2$:

$$(2.8) \quad (a_1 + i \cdot a_2) + (b_1 + i \cdot b_2) = a_1 + b_1 + i \cdot (a_2 + b_2)$$

Et eksempel på addition:

$$(5 + i \cdot 2) + (6 + i \cdot 4) = 5 + 6 + i \cdot (2 + 4) = 11 + i \cdot 6$$

Subtraktion; $z_1 - z_2$:

Foregår overordnet på samme måde som addition – vi subtraherer hvert for sig hhv. de reelle og imaginære tal.

Multiplikation; $z_1 \cdot z_2$:

$$(2.9) \quad (a_1 + i \cdot a_2) \cdot (b_1 + i \cdot b_2) = a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

Udregningen mellem de to lighedstegn er $a_1 \cdot b_1 + i^2 \cdot a_2 \cdot b_2 + i \cdot a_1 \cdot b_2 + i \cdot a_2 \cdot b_1$. Vi husker blot her, at $i^2 = -1$.

Et eksempel på multiplikation:

$$\begin{aligned}(3 + i \cdot 3) \cdot (7 + i \cdot 2) \\&= 3 \cdot 7 + i^2 \cdot 3 \cdot 2 + i \cdot 3 \cdot 2 + i \cdot 3 \cdot 7 \\&= 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2 + i \cdot (3 \cdot 2 + 3 \cdot 7) \\&= 21 - 6 + i \cdot (6 + 21) \\&= 15 + i \cdot 27\end{aligned}$$

Indførelsen af i giver en stor fordel ved multiplikation af komplekse tal. Her skal man bare ”gange ind i” parenteserne – præcis på samme måde som med reelle tal. Når dette er gjort, omskriver man blot i^2 med -1 og reducerer udtrykket.

Det komplekst konjugerede tal

Når man skal dividere komplekse tal med hinanden, bliver det en anelse mere kompliceret end ovenstående multiplikation og addition. Det har i forbindelse med division vist sig at være smart at indføre *det komplekst konjugerede tal*, da man ikke ønsker at have den imaginære enhed i stående i nævneren som her: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i \cdot a_2}{b_1 + i \cdot b_2}$.

Lad os først se på, hvad det komplekst konjugerede tal egentlig er. Det komplekse tal z 's komplekst konjugerede tal betegnes $\bar{z}$, og der gælder følgende sammenhæng mellem z og $\bar{z}$:

$$(2.10) \quad z = a_1 + i \cdot a_2 \Leftrightarrow \bar{z} = a_1 - i \cdot a_2$$

Når det så kommer til division af komplekse tal, er det komplekst konjugerede tal nyttigt at anvende, idet man forlænger brøken med den konjugerede nævner, og derved ender med en nævner bestående af et reelt tal. Vi bruger vores sædvanlige kvadratsætning samt husker, at $i^2 = -1$:

$$(2.11) \quad z \cdot \bar{z} = (a_1 + i \cdot a_2) \cdot (a_1 - i \cdot a_2) = a_1^2 + a_2^2 = \text{et reelt tal}$$

Division: $\frac{z_1}{z_2}$:

$$(2.12) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + i \cdot a_2)}{(b_1 + i \cdot b_2)} = \frac{(a_1 + i \cdot a_2)(b_1 - i \cdot b_2)}{(b_1 + i \cdot b_2)(b_1 - i \cdot b_2)} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + i \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{a_1^2 + a_2^2} + i \cdot \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1^2 + a_2^2}$$

Det ses altså, at vi i ovenstående tredje led forlænger med z_2 's konjugerede tal, og får i fjerde led et reelt tal i nævneren. Vi ender ud med et resultat på rektangulær form, hvilket ofte er bekvemt.

Et eksempel på division:

$$\begin{aligned} \frac{2 + i \cdot 4}{1 - i \cdot 3} &= \frac{(2 + i \cdot 4) \cdot (1 + i \cdot 3)}{(1 - i \cdot 3) \cdot (1 + i \cdot 3)} = \frac{2 + i \cdot 6 + 1 \cdot 4 + i^2 \cdot 12}{1 - i^2 \cdot 9} \\ &= \frac{2 + i \cdot 10 - 12}{10} = -1 + i \end{aligned}$$

Vi kender nu til den imaginære enhed i , og vha. af denne kan vi opskrive komplekse tal på rektangulær form. Vi har set, hvordan man adderer, subtraherer samt multiplicerer komplekse tal. Vha. det komplekst konjugerede tal kan vi nu også dividere komplekse tal på en simpel måde. I det følgende kapitel vil vi behandle en anden måde at opskrive de komplekse tal – nemlig ved oplysning af længde samt retningsvinklen for det komplekse tal.

3. Komplekse tal geometrisk

Den komplekse talplan

Reelle tal kan afbildes som punkter på en én-dimensional talakse, mens komplekse tal kræver to akser – ligesom et koordinatsystem. I det komplekse talplan kaldes 1.-aksen *de reelle tals akse* (eller realaksen), mens 2.-aksen kaldes *den imaginære akse*.^v Det komplekse tal $a_1 + i \cdot a_2$ kan betragtes som en stedvektor med koefficienterne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Langt hen ad vejen opfører komplekse tal sig som vektorer, men i enkelte tilfælde, skal man adskille de to størrelser; f.eks. kan komplekse tal ganges eller divideres med andre komplekse tal. Dette gælder *ikke* for vektorer. Bilag 1 viser forskellige reelle og komplekse tal i et todimensionalt koordinatsystem.

Polære koordinater

Vi har nu set komplekse tal afbildet som et punkt i en plan.

Man angiver dog ofte i stedet komplekse tal med *polære koordinater*, hvor det komplekse tal z med talparet (a_1, a_2) afsættes som en stedvektor (altså med start i origo). De polære koordinater angiver længden r (modulus) af stedvektoren samt vinklen v , som vektoren danner med 1.-aksen (argumentet). For det komplekse tal $z = a_1 + i \cdot a_2$ angives hhv. modulus og argument på følgende vis:

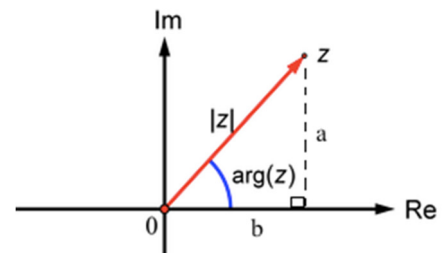


Fig. 1: De polære koordinater til tallet z

$$(3.1) \quad \text{Modulus, } r = |z|$$

$$(3.2) \quad \text{Argument, } v \text{ (vinklen fra 1.-aksen til } z) = \arg(z)$$

Vi viser nu, hvordan man udregner modulus og argument ud fra kendskab til de rektangulære koordinater, a_1 og a_2 :

Modulus (3.1) beregnes vha. Pythagoras læresætning for retvinklede trekanter: $|z| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Ved at projicere punktet z ind på 1.-aksen får man en retvinklet trekant (se fig. 1^{vi}).

Derved kan man finde argumentet (3.2) ved følgende ligninger:

$$v = \tan^{-1} \left(\frac{\text{mod}}{\text{hos}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\text{mod}}{\text{hyp}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\text{hos}}{\text{hyp}} \right).$$

En fastlæggelse af både modulus og argumentet fører kun til ét komplekst tal. Omvendt kan det samme komplekse tal skrives på flere forskellige måder med forskellige argumenter ved at addere v med 2π op til flere gange – dvs. $2\pi \cdot n$, hvor n er antal perioder. Dette skyldes, at sinus og cosinus jo er periodiske funktioner, og derfor ved man, at hvis man først finder en løsning i én periode, vil denne løsning også kunne findes i alle de kommende og tidligere perioder. Man er ofte kun interesseret i løsningerne til komplekse ligninger i én periode, og man har derfor indført begrebet *hovedargumenter*, som angiver alle argumenter i intervallet $[-\pi; \pi[$.

En tredje skrivemåde – vha. modulus og argument

Ved at se komplekse tal som stedvektorer kan man fastlægge tallene med en længde samt en retningsvinkel. Ved brug af modulus (r) og argument ($v = \arg(z)$) opskrifter vi det komplekse tal z som:

$$(3.3) \quad z = r_v = r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$$

r_v er blot en anden måde at skrive tallet på med oplysning af hhv. længde og vinkel.

Et eksempel på et komplekst tal skrevet med polære koordinater:

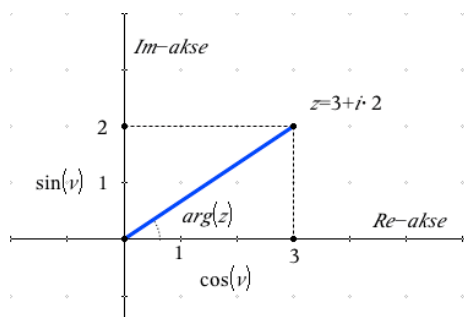
Tallet $z = (3 + i \cdot 2)$

Modulus r beregnes: $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Argumentet v beregnes: $\arg(z) = v \Leftrightarrow \cos(v) = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow v = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \approx 0,59$

Vi kender nu modulus og argumentet for z og kan skrive tallet vha. polære koordinater:

$$z = \sqrt{13}_{0,59} = \sqrt{13} \cdot (\cos(0,59) + i \cdot \sin(0,59))$$



Skrivemåden r_v , som vises i (3.3), giver mulighed for geometrisk fortolkning af multiplikation, hvilket vi vil se nærmere på i det følgende.

Multiplikation med polære koordinater

Fordelen ved skrivemåden r_v (3.3) bliver særlig nyttig ved multiplikation (samt division) af komplekse tal. For multiplikation gælder nemlig:

$$(3.4) \quad a_v \cdot b_w = (a \cdot b)_{v+w}$$

Eller sagt med ord:

$$(3.5) \quad \textit{Man multiplicerer komplekse tal ved at multiplicere modulerne samt addere argumenterne.}$$

Denne sætning vil vi bevise. Til dette formål har vi brug for de to additionsformler for sinus og cosinus, som ikke bevises her (beviserne kan findes i henvisningen i slutnoten^{viii}):

a. $\cos(v + w) = \cos(v) \cdot \cos(w) - \sin(v) \cdot \sin(w)$

b. $\sin(v + w) = \cos(v) \cdot \sin(w) + \sin(v) \cdot \cos(w)$

a. + b. anvendes i beviset herunder ved næstsidste udregning.

Bevis for (3.4) og (3.5):

$$\begin{aligned} a_v &= r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v)) \quad \wedge \quad b_w = s \cdot (\cos(w) + i \cdot \sin(w)) \\ a_v \cdot b_w &= (r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))) \cdot (s \cdot (\cos(w) + i \cdot \sin(w))) \\ &= rs \cdot ((\cos(v) \cdot \cos(w) - \sin(v) \cdot \sin(w)) + i \cdot (\cos(v) \cdot \sin(w) + \sin(v) \cdot \cos(w))) \\ &= rs \cdot (\cos(v + w) + i \cdot \sin(v + w)) \\ &= (ab)_{v+w} \\ &\quad Q.E.D. \end{aligned}$$

Som følge af (3.4) ser vi, at:

$$(3.6) \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(3.7) \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Dette bliver nyttigt når vi skal til at regne senere.

For at gøre sætning (3.4) mere forståelig, ser vi nu et eksempel for multiplikation både regneteknisk samt geometrisk:

Et eksempel på multiplikation med polære koordinater:

Beregning:

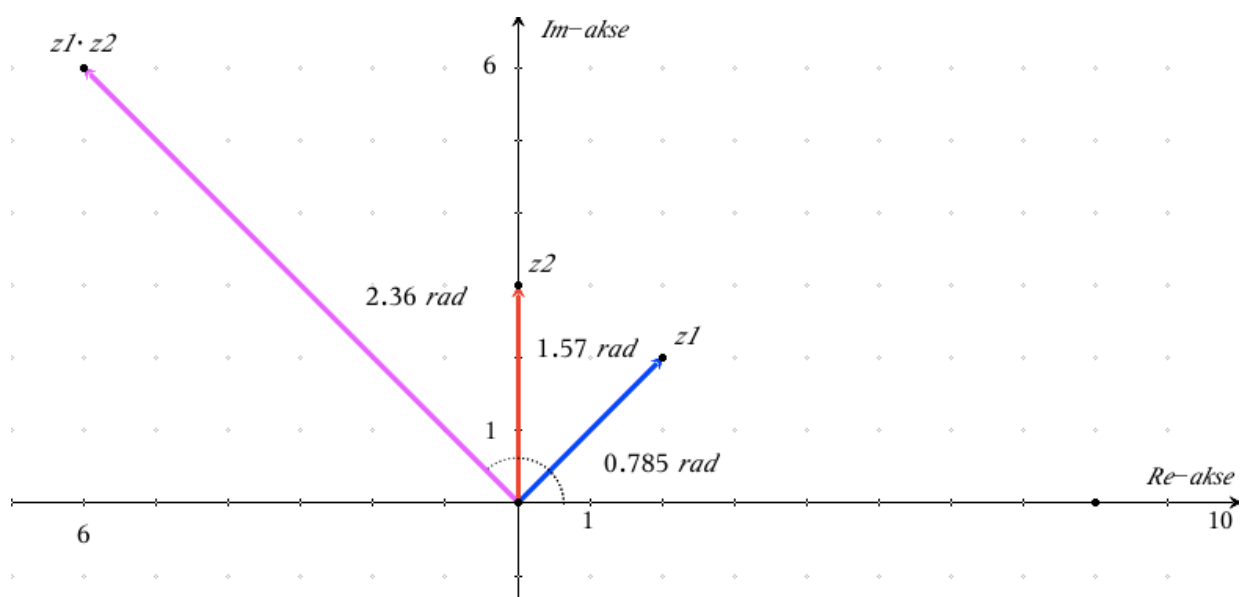
To komplekse tal på rektangulær form: $z_1 = 2 + i \cdot 2 \wedge z_2 = i \cdot 3$

Samme tal på r_v-form: $z_1 = (\sqrt{8})_{\frac{\pi}{4}} \wedge z_2 = 3_{\frac{\pi}{2}}$

Vi bruger (3.4):

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot \sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}} \cdot 3_{\frac{\pi}{2}} = (2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2})_{(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = (6 \cdot \sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}}$$

Geometrisk fortolkning af multiplikation i koordinatsystem:



Multiplikation vha. de Moivres formel:

Vi ser nu igen på sætning (3.6) og (3.7), og sammenholder det med specialtilfældet, hvor $z_1 = z_2 = z$. Vi kan generalisere reglerne, så de ikke kun gælder for tal opløftet i anden, men for tal opløftet i n -te eksponent^{viii}. Der gælder, at:

$$|z \cdot z \cdot z \cdot z| = |z| \cdot |z| \cdot |z| \cdot |z| = |z|^4$$

$$\arg(z \cdot z \cdot z \cdot z) = \arg(z) + \arg(z) + \arg(z) + \arg(z) = 4 \cdot \arg(z)$$

Ved fortsat multiplikation af tallet z , fås de generelle regneregler:

$$(3.8) \quad |z^n| = |z|^n$$

$$(3.9) \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$$

Ved at kombinere de to ovenstående sætninger, kommer vi frem til en meget nyttig formel til at beregne komplekse tal i potens – nemlig z^n . Formlen er opkaldt efter matematikeren Abraham de Moivre, som også var manden, der indførte den imaginære enhed^{ix}. For tallet $z = r(\cos(v) + i \cdot \sin(v))$ gælder følgende formel kaldet *de Moivres formel*:

$$(3.10) \quad z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot v) + i \cdot \sin(n \cdot v)) \mid n \in \mathbb{N}$$

Hvor r er modulus og v er argumentet til z .

De Moivres formel kan naturligvis bevises, men dette gør vi ikke her (beviset kan findes i henvisningen i slutnoten^x).

De Moivres formel er særdeles brugbar, når vi senere skal løse ligningen $z^n = a$. Et konkret eksempel, hvor formlen er god, er f.eks. når man skal udregne $(4 + i \cdot 2)^3$:

Et eksempel på hvordan de Moivres formel kan bruge til beregning af $z = (4 + i \cdot 2)^3$:

Først findes modulus af tallet i parentesens:

$$r = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Vi finder argumentet af tallet i parentesens:

$$v = \tan^{-1} \frac{\text{mod}}{\text{hos}} = \tan^{-1} \left(\frac{2}{4} \right) = 0,464$$

Vi har nu modulus samt argumentet for parantesen. Vi indsætter i de Moivres formel:

$$z = \sqrt{20}^3 \cdot (\cos(3 \cdot 0,464) + i \cdot \sin(3 \cdot 0,464)) = 20^{\frac{3}{2}} \cdot (0,178 + i \cdot 0,984) = 15,9 + i \cdot 88,0$$

4. Eulers formel

Vi vil nu se på en formel, som allerede blev opstillet i år 1748 af matematikeren Leonhard Euler, hvilket forklarer formelens navn; *Eulers formel*:

$$(4.1) \quad e^{i \cdot \theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

Her er e som sædvanlig grundtallet for den naturlige logaritme, i er naturligvis den imaginære enhed og $\theta \in \mathbb{R}$.

Den komplekse eksponentialfunktion

Den komplekse eksponentialfunktion defineres vha. Eulers formel. Eulers formel er egentlig en udvidelse af den normale eksponentialfunktion. Udvidelsen går på, at eksponentialfunktionen normalt kun er defineret for reelle tal i eksponenten, men her omfatter definitionen imaginære tal. Formlen er ikke i modstrid med de regneregler vi kender, hvilket letter arbejdet en hel del – i modsætning til, hvis vi skulle til at lære nogle helt nye og anderledes regneregler for imaginære tal i eksponenten. Vi vil nu tage nogle udvalgte potensregneregler for de reelle tal, og vise, at de også gælder for imaginære tal som eksponent.

For den reelle eksponentialfunktion gælder følgende potensregneregler, hvilken vi undlader at bevise her (beviset kan findes i henvisningen i slutnoten^{xi}):

$$(4.2) \quad e^m \cdot e^n = e^{m+n} \mid m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$$

Vi vil bevise, at denne potensregneregler også gælder for komplekse tal, så:

$$(4.3) \quad e^{i \cdot \theta_1} \cdot e^{i \cdot \theta_2} = e^{i \cdot (\theta_1 + \theta_2)} \mid \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Til beviset bruges igen de føromtalte additionsformler, $a + b$.

Bevis for, at potensregnerregel (4.2) også gælder for imaginære eksponentialfunktioner:

Af (4.1) har vi:

$$\begin{aligned}e^{i \cdot \theta_1} \cdot e^{i \cdot \theta_2} &= (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) \\&= (\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)) + i \cdot (\sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)) \\&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\&= e^{i \cdot (\theta_1 + \theta_2)}\end{aligned}$$

Vi ser af beviset, at resultatet stemmer overens med regnerregel (4.2).

Q.E.D.

For at være mere sikre på, at det ikke bare er et tilfælde, at regnerregel (4.2) gælder for den imaginære eksponentialfunktion, vil vi tage endnu et eksempel. Vi vil prøve at differentiere hver side af (4.1) – dvs. $e^{i \cdot \theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$. Igen bruges de differentiationsregler, som vi kender fra reelle tal.

Bevis for, at differentiation af imaginære eksponentialfunktioner kan udføres på sædvanlig vis:

VS: $\frac{d}{d\theta}(e^{i \cdot \theta}) = i \cdot e^{i \cdot \theta} = i \cdot \cos(\theta) - \sin(\theta)$

HS $\frac{d}{d\theta}(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = -\sin(\theta) + i \cdot \cos(\theta)$

Da både venstre og højre side er lig $-\sin(\theta) + i \cdot \cos(\theta)$, når de differentieres, kan vi slutte, at differentiation af imaginære eksponentialfunktioner foregår på almindelig vis.

Q.E.D.

Det kan umiddelbart virke underligt, at definition (4.1) er smart at indføre, men dette bliver tydeligt, når vi senere skal til at se på vekselstrøm og det dertil udførte forsøg med kapacitoren, spolen og delefilteret.

Sammenhæng ml. den komplekse eksponentialfunktion og trigonometriske funktioner

Eulers formel er særdeles betydelig, da den bygger bro mellem den komplekse eksponentialfunktion og de trigonometriske funktioner, sinus og cosinus. Det ses, at ud fra Eulers formel (4.1) kan $\cos(x)$ og $\sin(x)$ udtrykkes:

$$(4.4) \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad |\theta \in \mathbb{R}$$

$$(4.5) \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2 \cdot i} \quad |\theta \in \mathbb{R}$$

Vi vil i det følgende bevise, at (4.4) og (4.5) gælder.

Først minder vi lige om, at i trigonometrien gælder:

c. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

d. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

c. + d. anvendes i beviset herunder i anden linje af beviset.

Bevis for, at cosinusformlen (4.4) gælder (på baggrund af Eulers formel (4.1)):

I Eulers formel indsætter vi $-\theta$ på alle θ 's pladser:

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta) \\ &= \cos(\theta) - i \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

Eulers formel med θ : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$

Euler formel med $-\theta$: $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \cdot \sin(\theta)$

Vi lægger de "to varianter" af Eulers formel sammen og isolerer $\cos(x)$:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta) + \cos(\theta) - i \cdot \sin(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Q.E.D.

Beviset for sinusformlen (4.5) foregår på samme vis, men i stedet for at lægge ”de to varianter” af Eulers formel sammen, trækker vi dem blot fra hinanden og isolerer $\sin(\theta)$.

Eulers formel for sinus og cosinus bliver særligt anvendelige, når man skal reducere udtryk på formen $f(\theta) = \cos^n(\alpha \cdot \theta) \cdot \sin^m(\beta \cdot \theta) \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Her indsætter man blot i formelen og finder et reduceret udtryk. Dette kan specielt være smart, hvis man skal integrere et kompliceret udtryk – ved at omskrive det vha. (4.4) og (4.5) får man et udtryk på formen

$f(\theta) = \sum_k a_k \cdot \cos(b_k \cdot \theta) + c_k \cdot \sin(d_k \cdot \theta)$, hvilket er meget nemmere at integrere^{xii}.

Vi har således lært, hvordan man kan omskrive noget med cosinus eller sinus til noget en eksponentialfunktion vha. komplekse tal samt Eulers formel.

Vi vil nu se på, hvordan Eulers formel kan bruges til at omskrive et komplekst tal fra modulus-argumentform til et tal med rektangulære koordinater. Vi indførte tidligere Eulers formel som $e^{i\cdot\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$. Dette giver anledning til et komplekst tal med modulus $r = 1$, da tallet her kommer til at ligge på enhedscirklen. For et komplekst tal med modulus forskellig fra 1 gælder derfor:

$$(4.6) \quad z = r_\theta = |z| \cdot e^{i \cdot \arg(z)} = r \cdot e^{i \cdot \theta} = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

5. Løsning af ligninger

Teorien om de reelle tal har lært os, at ikke alle ligninger har en løsning. Når vi løser en andengradsligning fortæller diskriminanten os, hvor mange løsninger en given ligning har – den kan have én eller to, men også nul løsninger. Den simple ligning $x^2 = 9$ har løsningerne $x = 3$ og $x = -3$. Derimod har ligningen $x^2 = -9$ ingen løsning, da man inden for reelle tal ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal – eller sagt med andre ord: den findes ingen reelle tal, der opløftet til anden potens giver -9. Ved at regne med komplekse tal, får ligningen $x^2 = -9$ pludselig hele to løsninger. Altså en anderledes (og ”ny”) tankegang, som fører til helt andre sider af matematikken.

Nedenstående to udregninger viser, hvad løsningerne til hhv. $z^2 = 9$ og $z^2 = -9$ er, regnet med komplekse tal. Den første udregning skal naturligvis give samme resultat, som da vi regnede med reelle tal, for det er jo stadig samme regnestykke. Den anden udregning er derimod mere interessant:

$$\begin{aligned} z^2 &= 9 \\ z^2 - 9 &= 0 \\ (z - 3) \cdot (z + 3) &= 0 \\ z = 3 \wedge z &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 &= -9 \\ z^2 + 9 &= 0 \\ (z - 3 \cdot i) \cdot (z + 3 \cdot i) &= 0 \\ z = 3 \cdot i \wedge z &= -3 \cdot i \end{aligned}$$

Når man regner med komplekse tal, har ligningen af formen $z^n = b$, hvor b er et vilkårligt *reelt* tal, altid n løsninger – dog med undtagelsen for $b = 0$; ligningen har, ligesom i det reelle tilfælde, kun én løsning, nemlig $z = 0$.

Den binome ligning

Vi vil nu se på en lidt anderledes ligning – nemlig $z^n = a$, hvor *både* z og a er vilkårlige *komplekse* tal (forskellige fra 0). Vi vil behandle ligningen i det generelle tilfælde, hvor eksponenten, n , tilhører de naturlige tal. Denne slags ligning kaldes en *binom ligning* (toleddet ligning):

$$(5.1) \quad z^n = a \mid n \in \mathbb{N} \wedge z, a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (z_1 + i \cdot z_2)^n = a_1 + i \cdot a_2$$

Tallene z og a skrevet på modulus-argumentform er:

$$z = z_\theta = |z| \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \quad \text{og} \quad a = |a|_v = |a| \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$$

Vha. de Moivres formel (3.10) kan vi omskrive $z^n = a$ til:

$$|z|^n \cdot (\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)) = |a| \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$$

Vi bestemmer først modulus for tallet z i det vi ved, at modulus skal være ens på begge sider af lighedstegnet – nemlig længden af a , $|a|$:

$$(5.2) \quad |z|^n = |a| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}$$

Bemærk, at det numeriske tegn betyder, at vi kun søger den positive løsning – også i tilfældet $n = 2$, hvor vi normalt både har en positiv og en negativ løsning.

På tilsvarende måde kan vi finde argumentet til z – vi forlanger, at ”retningsvektoren” skal have samme vinkel på begge sider af lighedstegnet:

$$(5.3) \quad \cos(n \cdot \theta) = \cos(v) \wedge \sin(n \cdot \theta) = \sin(v) \Rightarrow \theta = \frac{v}{n} \text{ er en løsning til ligningen.}$$

Det ses, at denne løsning sikrer, at både cosinusleddet og sinusleddet giver samme værdi.

Altså har vi nu bestemt én løsning til den binome ligning $z^n = a$, nemlig $z = \sqrt[n]{|a|} \frac{v}{n}$.

Det viser sig, at den binome ligning har n løsninger, hvilket vi nu vil gennemgå for eksemplet $n = 3$:

Et eksempel på løsning en tredjegradslikning: $z^3 = 8\frac{3\pi}{4}$:

Vi finder den første løsning ($z_{\text{første}}$) vha. ovenstående teori (5.2) og (5.3):

For tallet $a = 8\frac{3\pi}{4}$ har vi modulus $|a| = 8$ og argumentet $\arg(a) = v = \frac{3\pi}{4}$

Modulus (5.2) af z , $|z|$: $|z|^3 = |a| = 8 \Leftrightarrow |z| = \sqrt[3]{|a|} = \sqrt[3]{8} = 2$

Argument (5.3) til $z_{\text{første}}$, $\arg(z)$: $\arg(z) = \frac{v}{3} = \frac{(\frac{3\pi}{4})}{3} = \frac{\pi}{4}$

Første løsning = $z_{\text{første}} = 2\frac{\pi}{4}$.

For at finde anden løsning (z_{anden}) af tredjegradslikningen bemærkes at $8\frac{3\pi}{4}$ også kan skrives som $8\frac{-5\pi}{4}$, da man bare trækker 2π fra i argumentet og derfor ender med samme komplekse tal.

Nu bruges samme metode som ovenfor igen til at finde løsningen:

Modulus forbliver samme værdi, nemlig 2.

Argument til z_{anden} , $\arg(z)$: $\arg(z) = \frac{v}{3} = \frac{(\frac{-5\pi}{4})}{3} = \frac{-5\pi}{12}$

Anden løsning: $z_{\text{anden}} = 2\frac{-5\pi}{12}$.

For at finde den tredje løsning (z_{tredje}) lægges 2π til $\frac{3\pi}{4}$ i stedet for at trække det fra. Dvs. ”vi tager en runde mere” rundt om origo. Vi har da vinklen $2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$. Vi bruger atter ovenstående metode til at finde tredje løsning:

Modulus forbliver samme værdi, nemlig 2.

Argument til z_{tredje} , $\arg(z)$: $\arg(z) = \frac{v}{3} = \frac{(\frac{11\pi}{4})}{3} = \frac{11\pi}{12}$

Tredje løsning: $z_{\text{tredje}} = 2\frac{11\pi}{12}$.

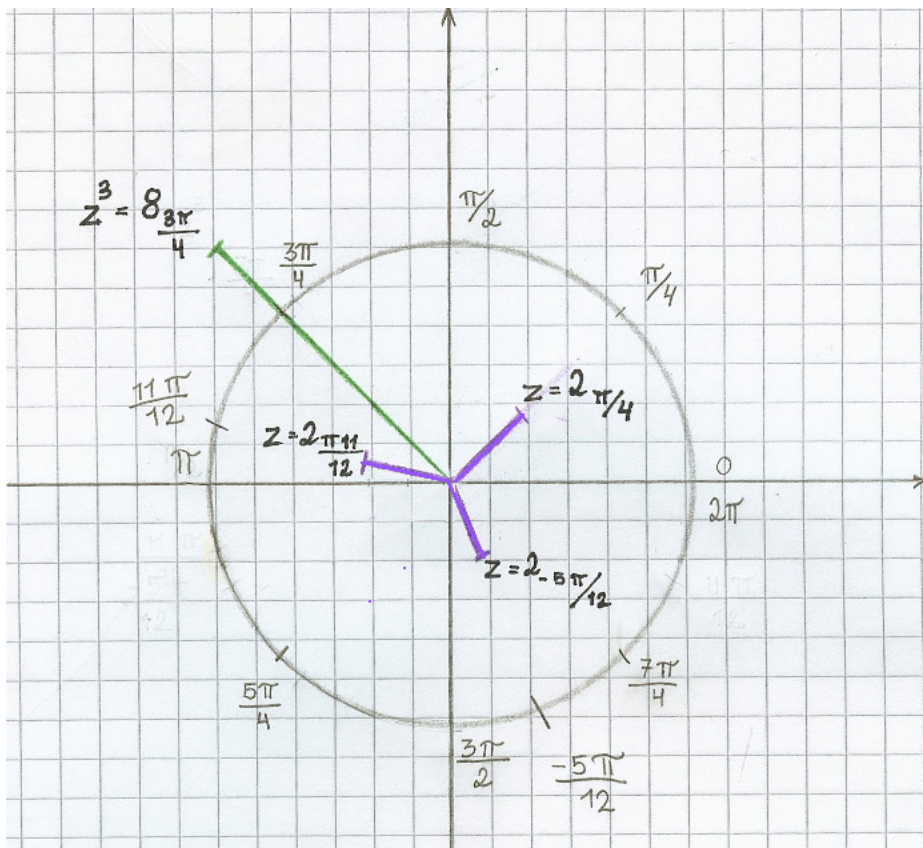
Vi har altså nu tre løsninger til likningen $z^3 = 8\frac{3\pi}{4}$:

$$z = 2\frac{\pi}{4} \vee z = 2\frac{-5\pi}{12} \vee z = 2\frac{11\pi}{12}$$

Bemærk, at alle løsninger ligger i intervallet $[-\pi; \pi[$.

FORTSAT... Et eksempel på løsning en tredjegradsligning: $z^3 = 8\frac{3\pi}{4}$:

Nedenstående illustration viser de tre løsninger til tredjegradsligningen, som jo har 3 løsninger ($n=3$). Det grønne linjestykke illustrerer tallet z^3 . Dette tal har modulus fire gange så lang som en af løsningerne. De tre lilla linjestykker symboliserer de tre løsninger. Alle de tre løsninger har den "egenskab", at når man multiplicerer deres argument med 3, får man et argument svarende til det grønne linjestykkes – nemlig $\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, $n = -1, 0, 1$.



I den tredje løsning lagde vi 2π til de $\frac{3\pi}{4}$, som er argument for a – man kan jo undre sig over, hvorfor vi ikke i stedet trak 4π fra. Det viser sig, at hvis man lægger $n \cdot 2\pi$, får man de samme løsninger hhv. udenfor og indenfor intervallet $[-\pi; \pi[$ (hovedargumentet) afhængigt af, hvad n er. Vi har valgt de løsninger indenfor intervallet, og derfor er der netop n løsninger.

Beviset for, at den binome ligning har n løsninger kan findes i henvisningen i slutnoten^{xiii}.

6. Komplekse tal og vekselstrøm

Komplekse tal er meget udbredt til beskrivelse af mange fysiske fænomener – vi har i opgaven valgt at fokusere på, hvordan komplekse tal kan bruges til at forenkle beregninger på vekselstrøm. I denne fysiske del vil vi desuden gennemgå et udført forsøg med en spole, en kapacitor samt et delefilter. Før vi går til forsøget, ser vi på, hvad vekselstrøm er, og hvorfor komplekse tal er smarte.

Vekselstrøm

Vekselstrøm (AC – Alternating Current) er kort sagt elektrisk strøm, der periodisk veksler i styrke samt polaritet, fordi elektronerne i ledningen bevæges frem og tilbage – i modsætning til jævnstrøm (DC), hvor elektronerne jo kun bevæger sig i én bestemt retning. For ikke at skabe forvirring, bruges i fysikken traditionelt bogstavet j for den imaginære enhed samt I for strømstyrken – vi vil her benytte os af samme notation. Derudover optræder der i den komplekse model komplekse spændinger, strømme, og impedanser (vekselstrømsmodstande), som vi betegner hhv. $\hat{U}$, $\hat{I}$, og $\tilde{Z}^{xiv}$.

Kompleks vekselspændingsforskel, $\hat{U}$

Vekselstrøm kan grafisk beskrives vha. en sinuskurve i et komplekst plan, hvor vi indlægger hhv. en realakse, U (x-aksen) samt en imaginær akse (y-aksen). En hel cirkelrotation af et linjestykke omkring origo, svarer til en hel periode (på 2π) på sinuskurven. Længden af linjestykket svarer til amplitudeværdien på sinuskurven. Ved at beskrive sinuskurven vha. komplekse tal, får vi modulus som længden af linjestykket samt argumentet som vinklen ($2\pi f \cdot t = \omega t$) mellem realaksen og retningsvektoren for det komplekse tal (se figur 2^{xv}). Ved at fastlægge ovenstående, beskrives den komplekse vekselspænding som:

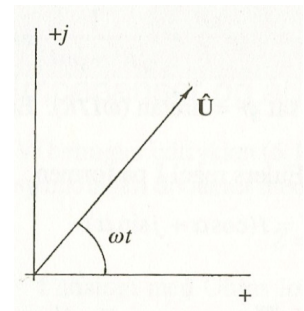


Fig. 2: Viser hhv. Re- og Im-aksen med modulus og tilhørende argument, som svinger venstre om med tiden.

$$(6.1) \quad \hat{U} = U_{maks} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_U) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_U)) = U_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_U)}$$

Sidste led af ovenstående er omskrevet vha. Eulers formel (4.1).

Her er: $U_{maks} \in \mathbb{R}$ = amplituden af sinuskurven; spændingens maksimalværdi (spidsværdi), $\omega = 2\pi f$ = vinkelfrekvensen (hvor f = antal svingninger pr. sekund), t = tiden og φ_U = indkoblingsvinklen, som har betydning for, hvor sinuskurven skærer realaksen (og hvor linjestykket starter sin svingning).

Vekselspændingen kan beskrives som en sinuskurve kun vha. reelle tal (virkelig spænding) som:

$$(6.2) \quad U = \operatorname{Re}(\hat{U}) = U_{maks} \cdot \cos(\omega t + \varphi_U)$$

U-værdien kan aflæses på realaksen ved at projicere $\hat{U}$ ned (eller op) på akse til et hvert tidspunkt.

Kompleks strømstyrke, $\hat{I}$

På samme måde som vi har kompleks spændingsforskel, $\hat{U}$, har vi også kompleks strømstyrke, $\hat{I}$. Da vi ikke er sikre på, at strømmen og spændingen svinger i samme fase, har vi ikke φ_U , men φ_I :

$$(6.3) \quad \hat{I} = I_{maks} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_I) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_I)) = I_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

Den virkelige strømstyrke kan vha. reelle tal beskrives som:

$$(6.4) \quad I = \operatorname{Re}(\hat{I}) = I_{maks} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

Kompleks impedans, $\tilde{Z}$

En vekselstrømsmodstand kaldes *kompleks impedans*, og betegnes med $\tilde{Z}$. Ved at definere impedansen som vist nedenfor, opnår vi, at Ohms lov gælder for impedans såvel som for jævnstrømsmodstand (resistans). Dette medfører, at ligesom resistans er forholdet mellem spændingsforskellen og strømstyrken, er impedans forholdet mellem kompleks spændingsforskel og kompleks strømstyrke:

$$(6.5) \quad \tilde{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

Den impedans man observerer i et elektrisk vekselstrømskredsløb (virkelig impedans), er givet ved modulus af den komplekse impedans:

$$(6.6) \quad Z = |\tilde{Z}| = \left| \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \right| = \left| \frac{U_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_U)}}{I_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_I)}} \right| = \frac{U_{maks}}{I_{maks}} \cdot |e^{j\varphi_Z}| = \frac{U_{maks}}{I_{maks}}$$

Nu har vi for både vekselspænding, strømstyrke og impedans opskrevet to udtryk for hver; nemlig et komplekst og et reelt udtryk. Grunden til, at vi indfører de komplekse udtryk er, at de viser sig at være meget nemmere at regne på, men det vi egentlig er interesserede i, er det reelle (virkelige) resultat.

Når en resistor tilsluttes et vekselstrømskredsløb, er der ingen faseforskydning mellem strømmen og spændingen over den. Derfor er faseforskydningen 0, og den reelle (virkelige) impedans samt den komplekse impedans har altså den samme værdi. Vi betegner denne værdi R^{xvi} :

$$(6.7) \quad \tilde{Z} = R \cdot e^{j \cdot 0} = R$$

I det følgende vil vi se på to andre komponenter (en spole og en kapacitor), som begge forøver en impedans i et vekselstrømskredsløb.

Kapacitor



Kapacitoren har i elektriske kredsløb symbolet til venstre. Sendes der vekselstrøm gennem komponenten bliver den skiftevis op- og afladet (i modsætning til ved DC)^{xvii}.

Vi påtrykker en kapacitor følgende komplekse spænding med indkoblingsvinklen 0:

$$(6.8) \quad \hat{U} = U_{maks} \cdot e^{j(\omega t + 0)} = U_{maks} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

Den mængde ladning, der er på de to parallelle plader i kapacitoren, er proportional med den komplekse spænding, $\hat{U}^{xviii}$.

$$(6.9) \quad \tilde{q}_{kapacitor} = C \cdot \hat{U}$$

C er en proportionalitetsfaktor, kaldet *kapacitans*, og måles i $\frac{V}{C}$ (Farad, F $\left(= \frac{1}{(\Omega \cdot Hz)} \right)$).

Da strømstyrke pr. definition er ladningsændring pr. tid, har vi da, at strømmen er differentialkvotienten af ovenstående ladningsudtryk:

$$\hat{I} = \frac{d}{dt}(\tilde{q}) = \frac{d}{dt}(C \cdot \hat{U}) = C \cdot \frac{d}{dt}(U_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_U)}) = C \cdot U_{maks} \cdot j\omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi_U)} = Cj\omega \cdot \hat{U}$$

$$(6.10) \quad \hat{I} = Cj\omega \cdot \hat{U} = Cj \cdot 2\pi f \cdot \hat{U}$$

Da $\hat{I}$ er ligefrem proportional med frekvensen kan vi se, at når frekvensen stiger, stiger strømstyrken også. Hvis frekvensen er 0, vil der ingen strøm løbe i kredsløbet.

Derudover kan vi også fra ovenstående udtryk se, at spændingen over kapacitoren er faseforskudt med en vinkel på $\frac{\pi}{2}$ i forhold til strømstyrken. Det er jo nemlig sådan, at når man multiplicerer et komplekst tal med den imaginære enhed j , bliver argumentet for det komplekse tal $\frac{\pi}{2}$ større. $\hat{U}$ er altså en kvart periode efter $\hat{I}$. Faseforskydningen kan også ses på en anden måde:

$$\hat{I} = Cj\omega \cdot \hat{U} = Cj\omega \cdot U_{maks} \cdot e^{j\omega t} = C \cdot e^{j(\frac{\pi}{2})} \cdot \omega \cdot U_{maks} \cdot e^{j\omega t} = C\omega U_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

I ovenstående er benyttet, at $e^{j(\frac{\pi}{2})} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j \cdot 1 = j$.

Vi ser, at for $\hat{I}$ er argumentet $e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ og modulus er $C\omega U_{maks} = I_{maks}$. Vi ved da, at:

$$(6.11) \quad \hat{I}_{kapacitor} = I_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

Tilsluttes kapacitoren en AC-kilde, vil den udøve en impedans, som afhænger af frekvensen og kapacitansen. Vi udregner den *komplekse impedans* for en kapacitor i kredsløbet:

$$(6.12) \quad \tilde{Z}_{kapacitor} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{Cj \cdot 2\pi f \cdot \hat{U}} = \frac{1}{(Cj \cdot 2\pi f)} = -j \cdot \frac{1}{(C \cdot 2\pi f)}$$

Vi beregner den reelle impedans ved at finde modulus af $\tilde{Z}_{kapacitor}$:

$$(6.13) \quad Z_{kapacitor} = |\tilde{Z}_{kapacitor}| = \left| -j \cdot \frac{1}{(C \cdot 2\pi f)} \right| = \frac{1}{(2\pi \cdot f \cdot C)}$$

Vi ser en omvendt proportionalitet mellem impedans og frekvens, hvilket må betyde, at jo større frekvens, des mindre impedans. Det ses også af ligningen, at hvis vekselstrømmen har lav frekvens,

vil impedansen blive stor, og der vil næsten ikke løbe nogen strøm igennem kapacitoren (ifølge Ohms lov). Vi ser nærmere på ovenstående sammenhænge i forsøgene senere.

Spole (induktor)



Spolen har i et kredsløb symbolet som vist til venstre.

Vi påtrykker en ideelspole i et vekselstrømskredsløb følgende vekselspænding:

$$(6.14) \quad \hat{U}_{\text{påtrykt}} = U_{\text{maks}} \cdot e^{j\omega t}$$

Inde i selve spolen dannes en modspænding, når der sendes strøm gennem komponenten. Der gælder følgende sammenhæng mellem strømmen og modspændingen:

$$(6.15) \quad \hat{U}_{\text{modspænding}} = -L \cdot \frac{d}{dt}(\hat{I})$$

L er en konstant, nemlig *spolens selvinduktion*, L , som afhænger af hvordan spolen er udformet.

Den samlede spændingsforskel bliver summen af den påtrykte spænding og modspændingen:

$$(6.16) \quad \hat{U} = R \cdot \hat{I} = \hat{U}_{\text{påtrykt}} - \hat{U}_{\text{modspænding}} = U_{\text{maks}} \cdot e^{j\omega t} - L \cdot \frac{d}{dt}(\hat{I})$$

I tilfældet, hvor resistansen er 0, har vi altså $U_{\text{maks}} \cdot e^{j\omega t} - L \cdot \frac{d}{dt}(\hat{I}) = 0$, og vi kan derfor opstille differentialligningen: $\frac{d}{dt}(\hat{I}) = \frac{U_{\text{maks}} \cdot e^{j\omega t}}{L}$. Denne har løsningen:

$$(6.17) \quad \hat{I} = \frac{U_{\text{maks}} \cdot e^{j\omega t}}{j\omega L} = \frac{\hat{U}_{\text{påtrykt}}}{j\omega L}$$

Vi kan se af ligningen, at spændingen er $\frac{\pi}{2}$ *foran* strømmen, da $\hat{U}$ bliver divideret med j (og vi ved, at når man dividerer med et komplekst tal, trækker man argumenterne fra hinanden – her trækkes $\frac{\pi}{2}$ altså fra).

Ved at isolere $j\omega L$ i ovenstående ligning, finder man impedansen:

$$(6.18) \quad \tilde{Z}_{spole} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\omega L$$

Den reelle (virkelige) impedans findes ved modulus (numerisk værdi) af ovenstående:

$$(6.19) \quad Z_{spole} = |j\omega L| = \omega L = 2\pi f \cdot L$$

Da impedans måles i Ω , og frekvens i Hz, ser vi, at L måles i $\frac{\Omega}{Hz}$ (H = Henry). Da der er ligefrem proportionalitet mellem spolens impedans og frekvensen, gælder, at jo større frekvens, des større impedans. Det ses af ligningen, at hvis vekselstrømmen har høj frekvens, vil impedansen blive stor, og der vil næsten ikke løbe nogen strøm igennem spolen (ifølge Ohms lov).

Spolen har altså en modsat afhængighed af frekvensen sammenlignet med kapacitoren.

Delefilter

I tovejshøjttalersystemer sidder et delefilter, som har til formål at filtrere lydsignalerne, så kun de lyse toner (med høj frekvens) går gennem diskant-højttaleren, mens kun de dybe toner (med lav frekvens) kommer i bashøjttaleren. Et delefilter består af en spole samt en kapacitor i parallelforbindelse. Ved at sende vekselstrøm gennem et kredsløb med et delefilter, vil strømmen fordele sig som beskrevet ovenfor, hvor højfrekvensstrømmen løber gennem kapacitoren (højpasfilter), mens lavfrekvensstrømmen løber gennem spolen (lavpasfilter). Når impedansen i hhv. kapacitoren og spolen er lige store, vil der løbe lige meget strøm gennem begge komponenter. Denne frekvens kaldes *delefilterets overgangsfrekvens*, og der må gælde følgende:

$$(6.20) \quad Z_{spole} = Z_{kapacitor} \Leftrightarrow 2\pi \cdot f \cdot L = \frac{1}{(2\pi \cdot f \cdot C)}$$

Overgangsfrekvensen, f_{ovg} , kan nu beregnes ved at isolere f i ligningen ovenfor:

$$2\pi \cdot f_{ovg} \cdot L = \frac{1}{(2\pi \cdot f_{ovg} \cdot C)} \Leftrightarrow (f_{ovg})^2 = \frac{1}{((2\pi)^2 \cdot L \cdot C)} \Leftrightarrow f_{ovg} = \sqrt{\frac{1}{((2\pi)^2 \cdot L \cdot C)}}$$

$$(6.21) \quad f_{ovg} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

7. Vekselstrømsforsøg

Vi gennemgår i det følgende tre forskellige vekselstrømskredsløb; i de to første (med hhv. en spole og en kapacitor) vil vi undersøge komponenternes impedans i ft. frekvensen. I det tredje forsøg vil vi kombinere de to komponenter til et såkaldt delefilter, og dermed undersøge, hvordan det virker. I forsøgsopstillingerne er de forskellige komponenter betegnet som hhv. spole (L) , kapacitor (C) , resistor (R) – almindelig dekademodstand , jordforbindelse , og en tonegenerator (vekselstrømsgenerator) .

Y_A og Y_B betegner de to polforbindelser til hhv. A- og B- pladerne på et *dobbeltstråleoscilloskop*, som viser spændingen som funktion af tiden (de er under forsøgene indstillet på samme følsomhed (V/cm) og samme time-base (ms/cm)).

Opstilling 1: forsøg med en spole

Vi opstillede kredsløbet som ses på figur 4. Vi brugte en almindelig dekademodstand som resistor (R).

Ved gradvist at variere frekvensen på tonegeneratoren, så vi effekten på de to spændingskurver af hhv. resistoren (Y_A) og spolen (Y_B) på dobbeltstråle-oscilloskopet. Ved at justere resistoren "rettede" vi kurverne, så de fik præcis samme amplitude – på den måde bliver både spænding samt strømstyrke ens for spolen og resistoren. Derved fandt vi let impedansen over spolen; den aflæses på dekademodstanden.

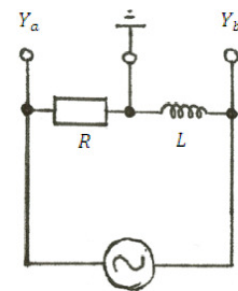


Fig. 3 Opstilling 1 med spole (L)

Databehandling 1

Se bilag 2.

For ca. 10 forskellige frekvenser (med et interval på ca. 500 Hz) indstillede vi dekademodstande, således, at signalerne havde samme amplitude på oscilloskopet. For hver af disse målinger noterede vi sammenhørende impedans og frekvens over spolen, og vi kunne udføre lineær regression. Vi så en direkte proportionalitet mellem frekvens og impedans over spolen, hvilket jo stemmer godt overens med teorien. Funktionsforskriften til grafen fundet ved lineær regression er $t(x) = 0,0093 \cdot x + 0,27$, hvor $t(x)$ er impedans og x er omega. Egentlig skulle b-værdien være 0, da der ingen impedans er, når frekvensen er 0. Forsøgsusikkerheden er så lille, at vi tillader os at se bort fra de 0,27. Spolens selvinduktans ses som hældningen på grafen $L = 0,0093 \text{ H} = 9,3 \text{ mH}$.

Opstilling 2: forsøg med en kapacitor

Forsøgsopstilling 2 var præcis som opstilling 1 – dog med en kapacitor i stedet for en spole.

Databehandling 2

Se bilag 3.

Vi ved fra teorien, at $Z_{\text{kapacitor}} = \frac{1}{\omega \cdot C}$. Dette kan omskrives til

$$\frac{1}{Z_{\text{kapacitor}}} = \omega \cdot C. \text{ Ved at have } \frac{1}{Z_{\text{kapacitor}}} \text{ som y-variabel og } \omega \text{ som}$$

x-variabel kan vi få en ret linje, hvor kapacitansen, C , aflæses som

hældningskoefficienten. Vi finder $C = 32\mu\text{F}$ og en god forklaringsgrad. Ved dernæst at lave potensregression over dataene for sammenhørende impedans og frekvens, fandt vi også en god forklaringsgrad, og en omvendt proportionalitet mellem impedans og frekvens – ligesom teorien siger i (6.13).

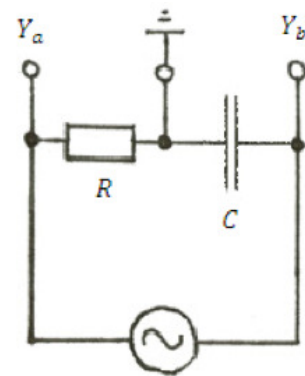


Fig. 4: Opstilling 2 med kapacitor (C)

Opstilling 3: forsøg med et delefilter

Se bilag 3. I det sidste forsøg prøvede vi at se, hvad der skete, når man kombinerede en spole samt en kapacitor i parallellforbindelse til et delefilter (vi brugte et færdigt delefilter, som ses i stiplede firkant).

R_a og R_b , begge på 8Ω , svarer til de modstande i højttalere, som filteret er beregnet til.

Ved at tilslutte Y_A og Y_B til dobbeltstråleoscilloskopet og indstille en frekvens på tonegeneratoren, så vi de to sinuskurver for hhv. spolen (R_a) og kapacitoren (R_b) i samme display.

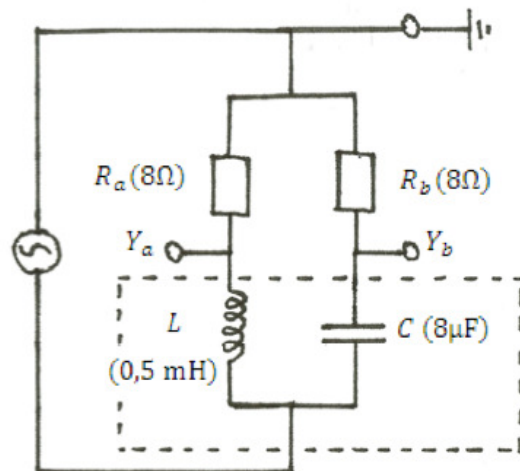


Fig. 5: Opstilling 3 med delefilter

Databehandling 3

Ved langt de fleste frekvenser var den ene kurves amplitude højere end den anden (spændingen over den ene resistor var altså større end den andens, og der løb ikke lige meget strøm gennem begge resistorer). Ved at justere på frekvensen på tonegeneratoren så vi, at jo lavere frekvens, des højere spænding over spolen (R_a), mens spændingen så faldt over kapacitoren (R_b). Ved at prøve os lidt frem, fandt vi en frekvensværdi, hvor de to sinuskurveamplituder blev lige høje – der løb altså

her lige meget strøm gennem de to komponenter. Frekvensværdien var her $2079 \text{ Hz} \approx 2,1 \text{ kHz}$, og kaldes *overgangsfrekvensen*.

Vi kan også beregne os frem til overgangsfrekvensen ved at bruge formel (6.21). På de to komponenterne står hhv., at $L = 0,5 \text{ mH}$ og $C = 8\mu\text{F}$ – vi indsætter i formelen:

$$f_{ovg} = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L} \cdot 2\pi} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6} \cdot 8F \cdot 5 \cdot 10^{-3}H} \cdot 2\pi} = 2,5 \text{ kHz}$$

Vi udregner afvigelsen mellem den ovenstående beregnede overgangsfrekvens og frekvensen, vi så da de to kurver havde samme amplitudeværdi: $\frac{(2,5 \text{ kHz} - 2,1 \text{ kHz})}{2,5 \text{ kHz}} \cdot 100 \% \approx 16 \%$

Der er altså en vis afvigelse på 16 %, men dette skyldes bl.a., at det er svært med det blotte øje at afgøre præcis, hvornår de to sinuskurver er præcis lige høje.

Udover de to ovenstående måder til at komme frem til overgangsfrekvensen, kan vi se på, hvornår de to kurver (se bilag 3), der er lavet ved regression, skærer hinanden. Ved skæringspunktet er overgangsfrekvensen nået, da impedansen her er nøjagtig lige stor i de to komponenter. Vi ser, at denne overgangsfrekvens er $2062 \text{ Hz} \approx 2,1 \text{ kHz}$, hvilket igen er rimeligt.

8. Konklusion

Vi har nu indført de komplekse tal, $\mathbb{C}$, og lært, hvordan man kan opskrive dem på flere forskellige måder. Et komplekst tal er kort sagt et tal, som kan afbilledes i et todimensionalt koordinatsystem, og hvor tallet indeholder en realdel samt en imaginærdel. Imaginærdelen indeholder *den imaginære enhed* i , og specielt ved dette tal er, at: $i^2 = -1$. Vi har erfaret, at de normale regneregler også gælder for komplekse tal, hvilket gør regning med komplekse tal en hel del enklere.

Dertil har vi set, hvordan komplekse tal kan multipliceres – dels ved geometrisk konstruktion, dels ved at multiplicere modulus og addere argumentet for tallet. Vi har behandlet den binome ligning $z^n = a \mid a, z \in \mathbb{C}$, som giver anledning til n løsninger, og introduceret Eulers formel, som kan bruges til at konvertere sinus og cosinus funktioner til komplekse eksponentialfunktioner – og omvendt.

Vi har i forbindelse med de komplekse tal set på, hvordan tallene kan bruges til nemt at beskrive vekselstrømmens sinuskurve samt faseforskydning mellem strøm og spænding i hhv. en kapacitor og en spole. Vi har stiftet bekendtskab med kompleks og reel hhv. spænding, strømstyrke og impedans (vekselstrømsmodstand) i to komponenter; nemlig en spole samt en kapacitor.

Vi har i forbindelse med vekselstrøm udført tre forsøg med hhv. en spole i serieforbindelse med en resistor, så en kapacitor i serieforbindelse med en resistor og til sidst en spole og en kapacitor i parallelforbindelse (og hver i serie med en modstand) – et delefilter. Ved at måle samhørende værdier for frekvens og impedans over komponenterne, samt gennemgå teorien bag, fandt vi, at en spole fungerer som en bashøjtaler i et delefilter (da den tillader strøm med lav frekvens at gennembløbe), mens en kapacitor fungerer som en diskant højtaler (da den tillader strøm med høj frekvens at gennembløbe). I forsøget med delefilteret fandt vi desuden overgangsfrekvensen mellem spolen og kapacitoren i delefilteret til 2,1 kHz, mens vi ved beregning på de målte komponentdata fandt 2,5 kHz. Ved denne frekvens vil impedansen over de to komponenter altså være ens, og der vil løbe lige meget strøm gennem spolen og kapacitoren.

Opgavens omfang svarer til ca. 20 normalsider.

9. Litteraturliste

Bøger:

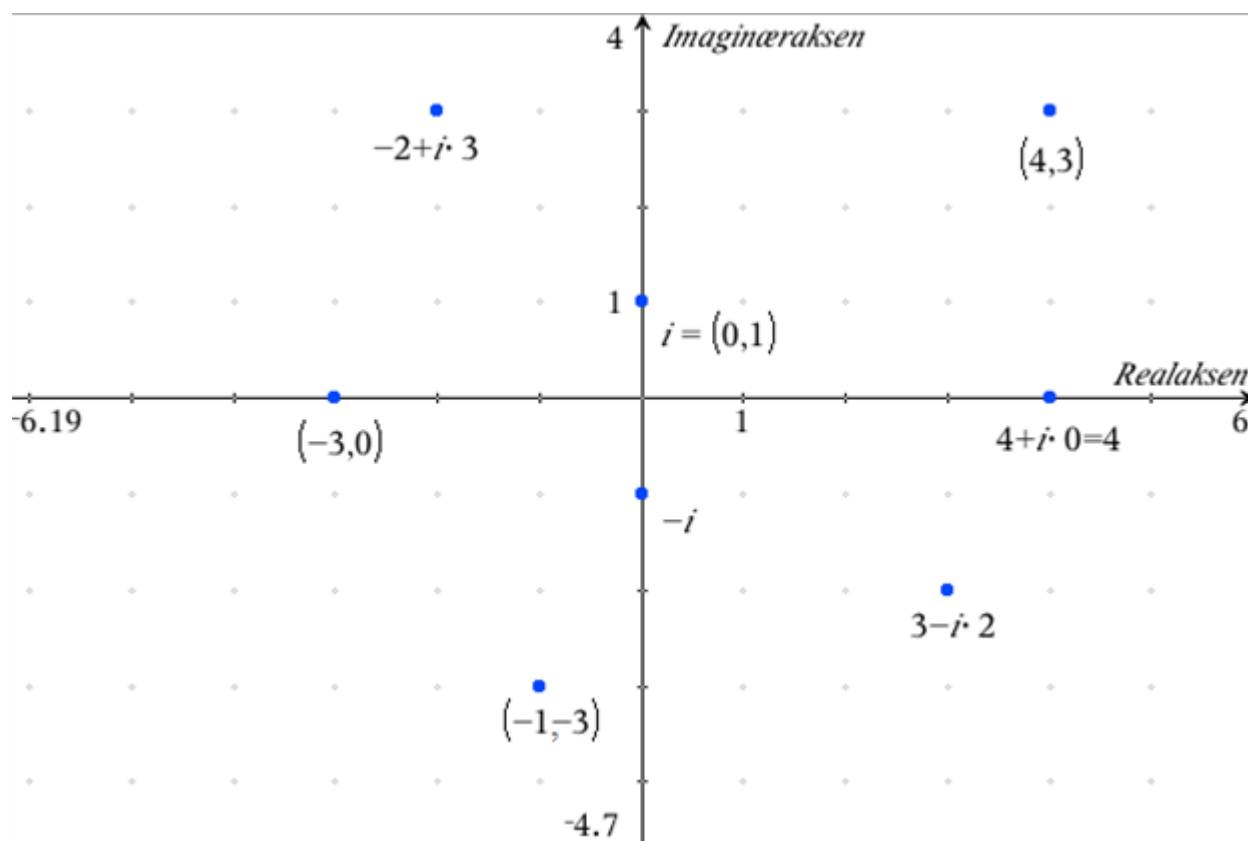
- Frandsen, Jesper: ”Komplekse tal og fraktaler”, Systime, 1992.
- Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh: ”Komplekse tal – teori og anvendelse”, Forlaget HAX, 2009.
- Ebert, Jørgen: ”Komplekse tal – en historisk og aksiomatisk introduktion”, Forlaget Minor, 1995.
- Jensen, Helge Elbrønd: ”Matematisk analyse”, bd. 1, 7. udg., Matematisk institut DTH, 1984.
- Larsen, Torben Elm: ”Elementær kredsløbsteknik”, 1. udg., 1. op, Teknisk Forlag, 1996.
- Carstensen, Jens og Jesper Frandsen: ”MAT 2A”, 1. udg., 2. op, Systime, 1998.
- Schomacker, Gert: Udleveret kompendium om komplekse tal og vekselstrøm ”Et lynkursus”.

Hjemmesider:

- MatLex > Komplekse tal og funktioner: Lydik Garm. Adresse: <http://www.matlex.dk/komplex.html>.
Besøgt fredag d. 6. dec. 2013
- Frividen > Bevis for potensregneregler: Bjørn Clausen. Adresse:
<http://frividen.dk/default.aspx?catid=a28f02c6-fc80-4e4c-b5a7-d234e9d2f2ff&tabid=67>. Besøgt
mandag d. 9. dec. 2013
- DTU > Komplekse tal: Karsten Schmidt: Adresse:
<http://01005.mat.dtu.dk/materialer/enoter/afsnit/NUID43-tn29/> . Besøgt tirsdag d. 10. dec. 2013

Bilag

1. bilag: Den komplekse talplan



2. bilag: Forsøg 1; forsøg med en spole

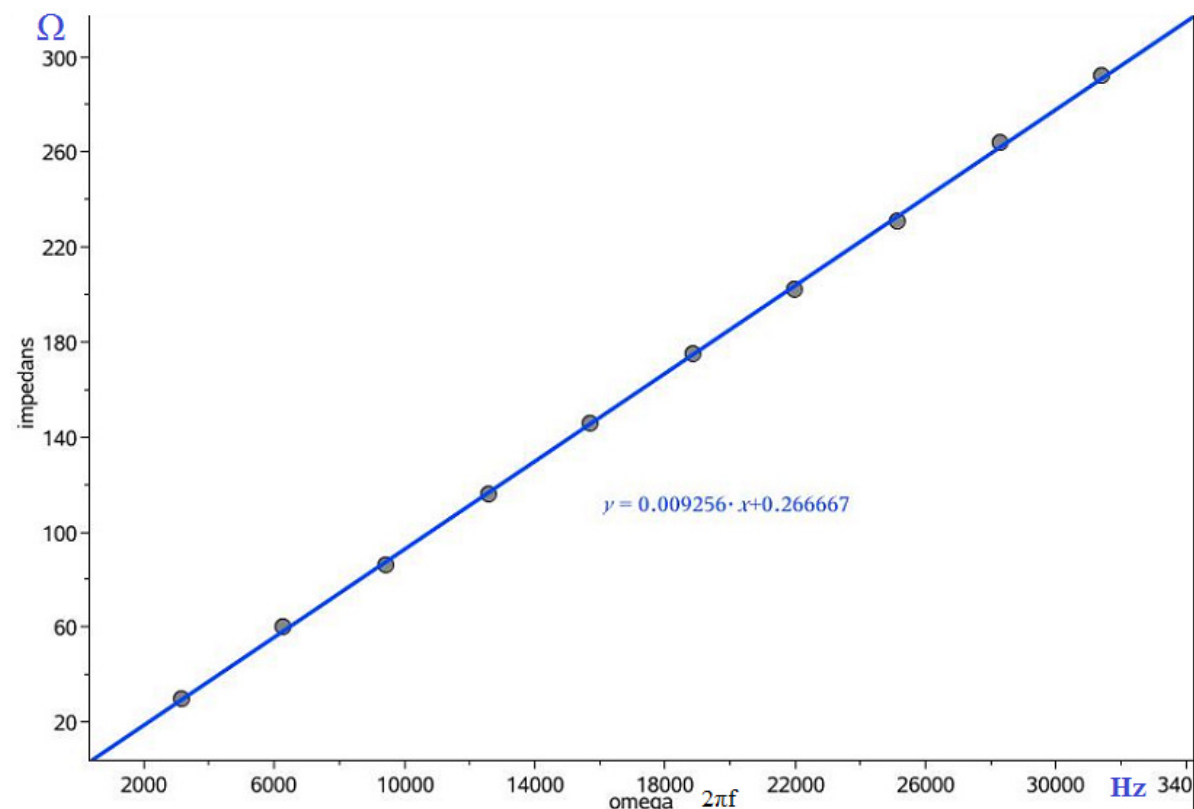
Nedenstående data viser sammenhængen mellem frekvensen og impedansen over en spole.

Det ses til højre i skemaet, at lineær regression mellem omega ($2\pi f$) og impedans, giver en rigtig god forklaringsgrad på $r^2 = 0,99975$. Den lineære regression giver os en hældning på 0,00926.

Spolens selvinduktans er altså $L = 0,00926 \text{ H} \approx 9,3 \text{ mH}$.

	A frekvens	B impedans	C omega	D	E	F	G
◆			=round(2*π*frekvens)			=LinRegM	
1	500	30	3141.59		Titel	Lineær r...	
2	1000	60	6283.19		RegEqn	m*x+b	
3	1500	86	9424.78		m	0.009256	
4	2000	116	12566.4		b	0.266667	
5	2500	146	15708.		r ²	0.999748	
6	3000	175	18849.6		r	0.999874	
7	3500	202	21991.1		Resid	{0.65454...	
8	4000	231	25132.7				
9	4500	264	28274.3				
10	5000	292	31415.9				

Nedenstående graf viser sammenhængen mellem omega (Hz) og impedans (Ω). Der ses en tydelig ligefrem proportionalitet mellem de to variable. Spolens selvinduktans ses som hældningen.



3. bilag: Forsøg 2; forsøg med en kapacitor

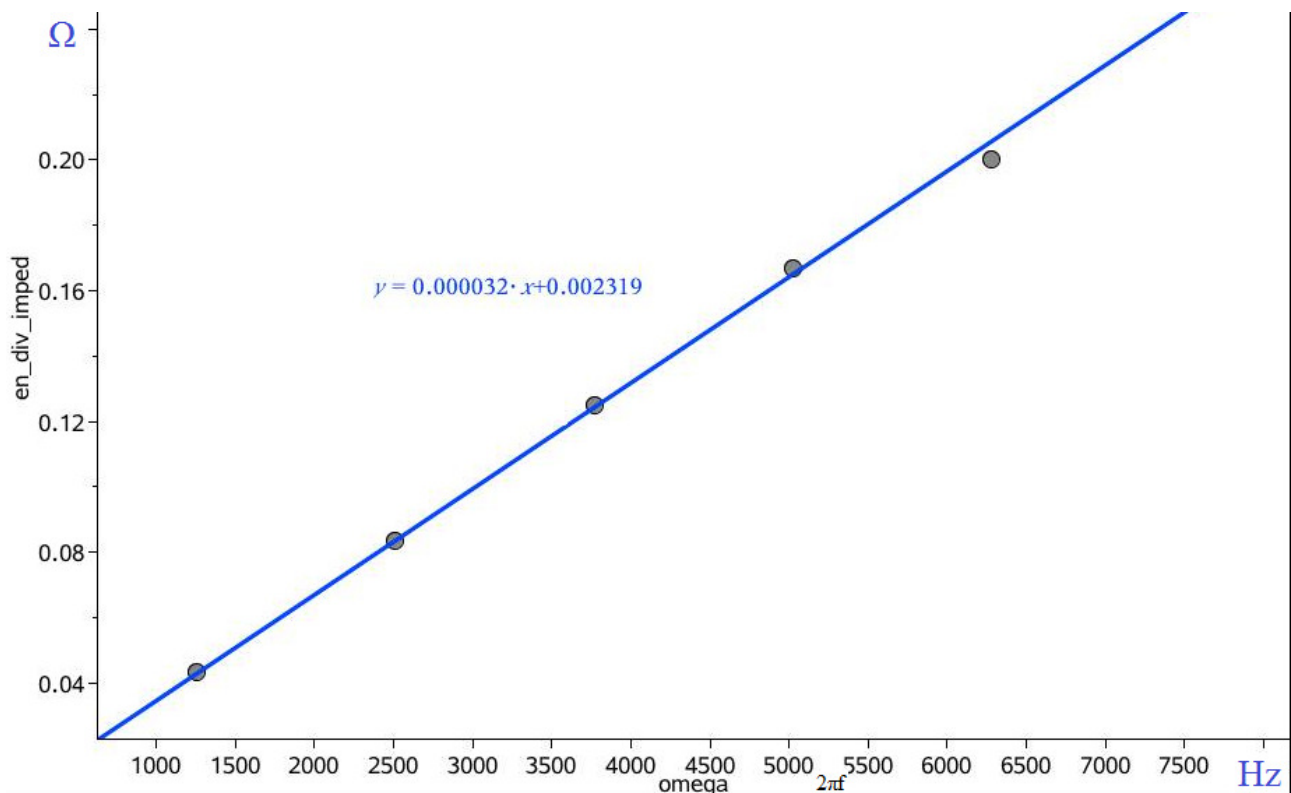
Ved at udføre lineær regression af $\frac{1}{\text{impedans}}$ som en funktion af omega ($2\pi f$), kan vi udføre lineær regression med en forklaringsgrad $r^2 = 0,9993$. Hældningen, som findes ved regression er kapacitorens kapacitans, C .

	A frekvens	B impedans	C en_div_imped	D omega	E	F	G	H
			=round(1/impedans)	=round(2*pi*frekvens)			=LinRegM	
1	200	23	0.043478	1256.64		Titel	Lineær r...	
2	400	12	0.083333	2513.27		RegEqn	m*x+b	
3	600	8	0.125	3769.91		m	0.000032	
4	800	6	0.166667	5026.55		b	0.002319	
5	1000	5	0.2	6283.19		r ²	0.99831	
6	1200	4	0.25	7539.82		r	0.999154	
7						Resid	{4.65838...	

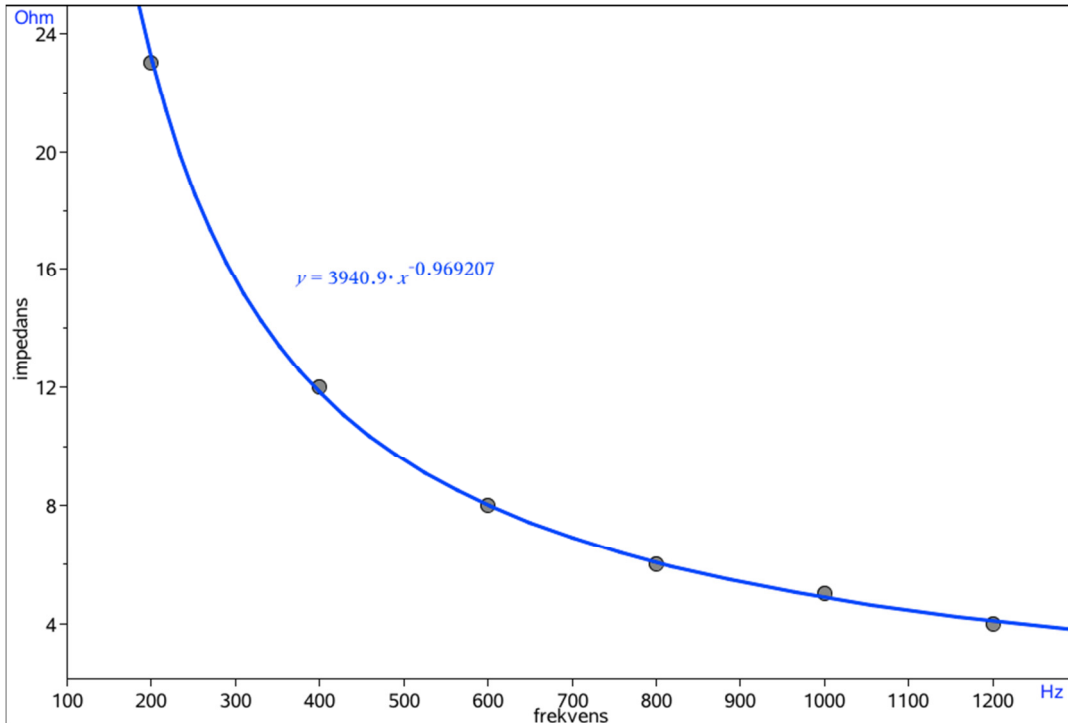
Vi afbilder $\frac{1}{\text{impedans}}$ som funktion af omega og får en flot ret linje. Vi ser den konstante

kapacitans som hældningen på grafen: $0,000032 \frac{1}{\Omega \cdot \text{Hz}} = 0,000032 (\Omega \cdot \text{Hz})^{-1} = 0,000032 F$.

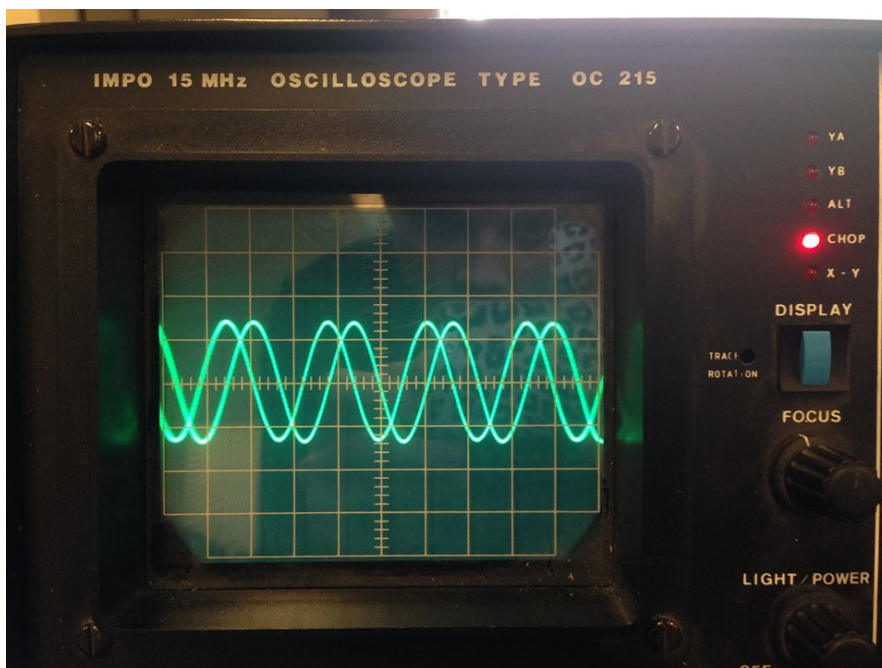
Kapacitorens kapacitans er altså $C = 32\mu F$.



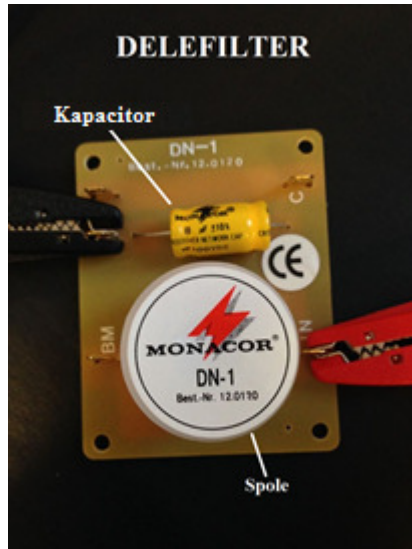
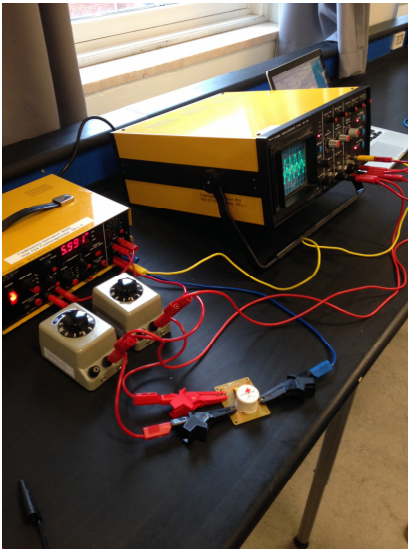
Ved i stedet at afbillede impedans som funktion af frekvensen, kan vi se en hyperbel omvendt proportionalitet mellem impedansen og frekvensen for kapacitoren. Dette stemmer godt overens med teorien.



På dobbeltstråleosilloskopet nedenfor ser vi spændingskurven for hhv. kapacitoren og resistoren. Vi ser faseforskydningen på en kvart svingning mellem bølgerne. Vi ved fra teorien, at kapacitorens spænding er $\frac{\pi}{2}$ efter strømmen, mens der ingen faseforskydning er for resistoren. Dette stemmer.

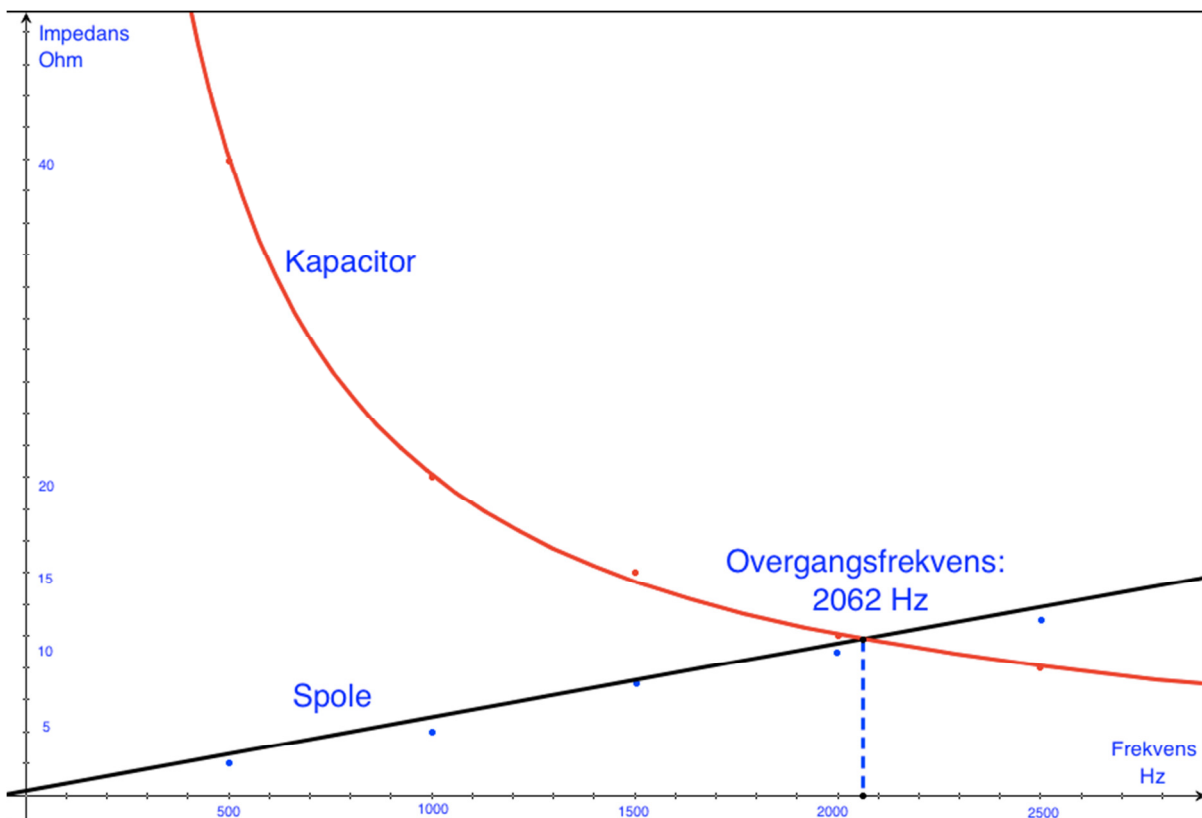


4. bilag: Forsøg 3; forsøg med et delefilter

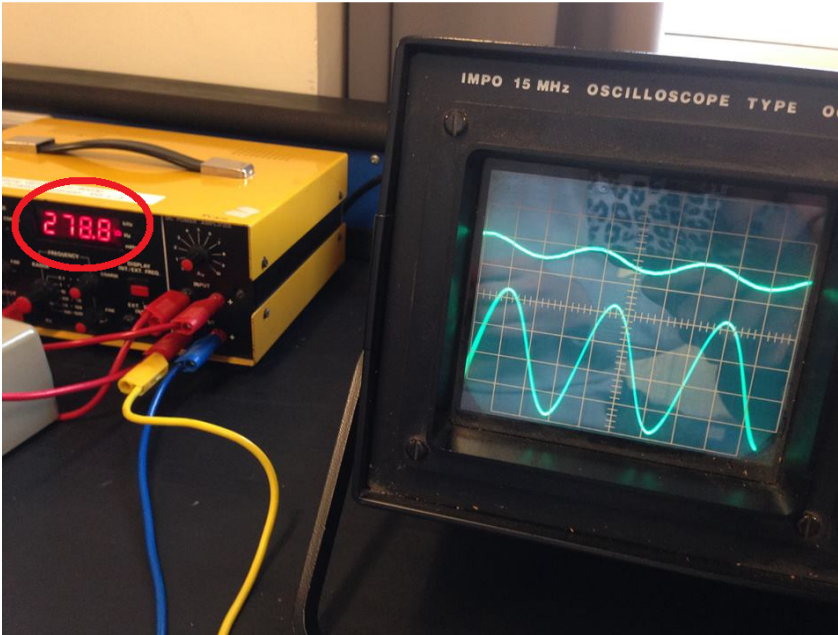


Ovenstående to billeder viser forsøgsopstillingen, hvor spolen og kapacitoren sidder i parallelforbindelse, og sammen udgør et delefilter.

Nedenstående to kurver viser delefilterets to komponenter, hvor skæringen af de to grafer er overgangsfrekvensen mellem spolen og kapacitoren – her er deres impedans lige stor.



Billedet herunder viser, at overgangsfrekvensen *ikke* er nået, fordi de to sinusbølger ikke har samme amplitude. Det ses også, at frekvensen er meget mindre end de 2,1 kHz (overgangsfrekvensen), hvor der jo løber lige meget strøm gennem komponenterne. Frekvensen kan aflæses på tonegeneratoren til venstre i billedet til knap 300 Hz. Vi ved fra teorien, at ved en lille frekvens, er impedansen af spolen lille, og der vil løbe mest strøm igennem den – altså symboliserer den nederste kurve spolen.



Slutnoter

- ⁱ Frandsen, Jesper: ”*Komplekse tal og fraktaler*”, side 13
- ⁱⁱ Jensen, Helge Elbrønd: ”*Matematisk analyse*”, side 89
- ⁱⁱⁱ Ebert, Jørgen: ”*Komplekse tal – en historisk og aksiomatisk introduktion*” side 15
- ^{iv} Frandsen, Jesper: ”*Komplekse tal og fraktaler*”, side 15
- ^v Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh: ”*Komplekse tal – teori og anvendelse*”, side 13
- ^{vi} Billede: <http://01005.mat.dtu.dk/materialer/enoter/afsnit/NUID43-tn29/>
- ^{vii} Bevis: Carstensen, Jens m.fl.: ”*MAT 2A*”, side 286-288
- ^{viii} Frandsen, Jesper: ”*Komplekse tal og fraktaler*”, side 24
- ^{ix} Frandsen, Jesper: ”*Komplekse tal og fraktaler*”, side 24
- ^x Bevis: Frandsen, Jesper: ”*Komplekse tal og fraktaler*”, side 24
- ^{xi} Bevis: <http://frividen.dk/default.aspx?catid=a28f02c6-fc80-4e4c-b5a7-d234e9d2f2ff&tabid=67>
- ^{xii} Jensen, Helge Elbrønd: ”*Matematisk analyse*”, side 119-120
- ^{xiii} Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh: ”*Komplekse tal – teori og anvendelse*”, side 27
- ^{xiv} Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh: ”*Komplekse tal – teori og anvendelse*”, side 51
- ^{xv} Billede: Larsen, Torben Elm: ”*Elementær kredsløbsteknik*”, side 109 fig. 6.6
- ^{xvi} Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh: ”*Komplekse tal – teori og anvendelse*”, side 55
- ^{xvii} Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh: ”*Komplekse tal – teori og anvendelse*”, side 47
- ^{xviii} Schomacker, Gert: ”*Et lynkursus*”, side 4