



Frederiksborg Gymnasium og HF

Studieretningsprojekt 2011/12

Elevens navn:	Maria Vang Uttenthal	Klasse:	3x 19
	Fag:	Lærer:	
Studieretningsfag på A-niveau	MA	GJ Gert Uttenthal Jensen	
Fag på mindst B-niveau	HI	AJ Anders Jensen	

Område og faglig problemstilling (Udfyldes af eksaminator).

Fermats sidste sætning og Sophie Germain

Opgaveformulering (Udfyldes af eksaminator)

Redegør i hovedtræk for det franske samfunds opbygning og forandring i perioden omkring den franske revolution med særligt fokus på kvindernes stilling og rolle.

Undersøg ud fra relevant kildemateriale oplysningstidens og den franske revolutions syn på uddannelse og videnskab.

Præsenter Fermats sidste sætning og Sophie Germains bidrag til beviset for den. Giv et bevis for Fermats store sætning i tilfældet $n = 4$.

Vurdér Sophie Germains muligheder og betydning som naturvidenskabskvinde i datidens franske samfund.

Det forventes, at opgaven har et omfang svarende til 15-20 normalsider.
(Indholdsfortegnelse, noter, litteraturliste, grafer, illustrationer etc. medregnes ikke i sidetallet).

Vejleders underskrift:

Gert Uttenthal Jensen

Vejleders underskrift:

Anders Jensen

Jeg bekræfter herved med min underskrift, at opgavebesvarelsen er udarbejdet af mig. Jeg har ikke anvendt tidligere bedømt arbejde uden henvisning hertil, og opgavebesvarelsen er udfærdiget uden anvendelse af uretmæssig hjælp og uden brug af hjælpemidler, der ikke har været tilladt under prøven.

Elevens underskrift:

Maria Vang Uttenthal

Opgaven udleveres d. 6/12 2011 kl. 14.00

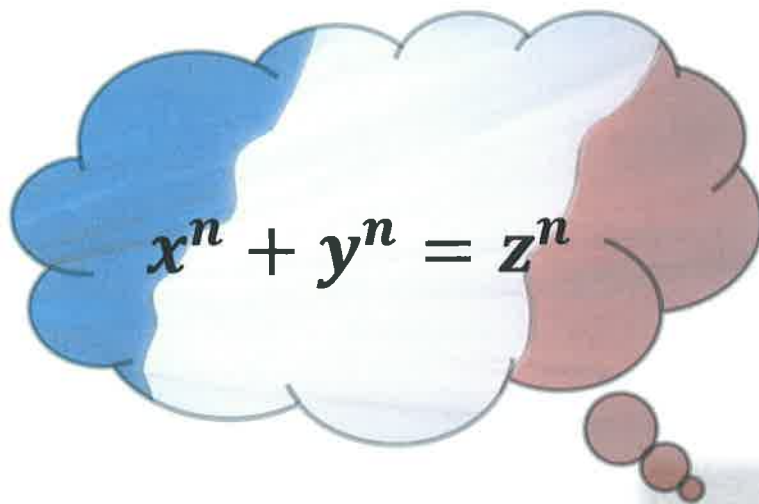
Opgaven afleveres d. 20/12 2011 kl. 14.00 i 4 eksemplarer i adm. 2

- Husk dette ark som forside i alle 4 eksemplarer.

Fermats sidste sætning og Sophie Germain

Studieretningsprojekt i matematik og historie

Af Maria Vang Uttenthal, 3.x



Abstract

The story of Fermat's Last Theorem – claiming that the equation $x^n + y^n = z^n$ has no solutions in positive integers if $n > 2$ – covers a historical period of 350 years. This paper deals with the development of the problem that took place in France around the years of the French Revolution, and which was a result of the talented mathematician Sophie Germain's work. In addition, Fermat's Last Theorem is proved in the special case of the biquadratic equation with the method of infinite descent.

By using the theory of residues, Sophie Germain formulated a theorem that proved Fermat's equation for a certain group of odd prime exponents less than 100. Though she did not manage to provide an infinite proof, it was the first general result about arbitrary exponents. Thus, her work is here considered and substantiated with an example. Furthermore, it is placed in the context of the French society at the time, in order to understand the conditions under which Germain sought for mathematical recognition. Despite the huge alterations of the Revolution, the inferiority of women endured, preventing the possibilities of female education to a great extent. Naturally, Sophie Germain suffered from this, and the paper evaluates the consequences of her limited academic opportunities – the most significant one being her lack of much deserved respect and acknowledgement.

Indholdsfortegnelse

Indledning	s. 1
Den Franske Revolution og kvinderne	s. 2
- Revolutionen begynder, og kvinderne tager til Versailles	s. 2
- Kvinderettighedserklæringen	s. 3
- Revolutionen slutter, og kvinderne gemmes af vejen	s. 4
Det oplyste og det revolutionære syn på uddannelse og videnskab	s. 5
- De Lærde Kvinder	s. 6
- Matematikkens kvinder	s. 8
Sophie Germain	s. 8
Fermats sidste sætning	s. 10
- Bevis for sætningen i tilfældet $n = 4$	s. 11
- Sophie Germains bidrag	s. 16
Konklusion	s. 19
Litteraturliste	s. 21

Indledning

*"Det er umuligt at dele en kubus i en sum af to kuber, en fjerdepotens i en sum af to fjerdepotenser, og i almindelighed en hvilken som helst potens større end to i en sum af to tilsvarende potenser. Jeg har fundet et virkelig vidunderligt bevis for denne sætning, men denne margen kan ikke rumme det."*¹

Vi befinder os i et lille, isoleret arbejdsværelse i den franske by Toulouse, da Pierre de Fermat i 1637 formulerer denne marginkommentar. Han sidder bøjet over sin kopi af det store talteoretiske værk *Arithmetica*, skrevet af den græske matematiker Diophantos omkring år 250.

Alle hans matematiske bedrifter var inspireret af dette værk, der efter hans død blev udgivet i 1670 i en specialudgave "med Bemærkninger af P. de Fermat"². Bemærkningerne skulle vise sig at indeholde utallige opdagelser og matematiske sætninger, men det er utvivlsomt den ovenstående, der udødeliggjorde hans navn. De næste 350 år skulle fortvivlede matematikere verden over forgæves forsøge at bevise "Fermats sidste sætning", der med en moderne matematisk formulering påstår, at ligningen:

$$x^n + y^n = z^n$$

ikke har positive heltalsløsninger for $n > 2$.

I 1995 blev sætningen endelig bevist af amerikaneren Andrew Wiles som resultatet af en livslang drøm og ni års intensivt arbejde. Beviset er flere hundrede sider langt og anvender mange matematiske metoder og principper, der er opdaget langt senere end Fermats tid.³ Men selvom den endelige løsning på dette hårrejsende problem først kom mange, mange år efter det blev præsenteret, er det arbejde, som historiens store matematikere har foretaget med sætningen undervejs, sjældent gået helt tabt. Oftest har et forgæves forsøg på at bevise sætningen enten ført til andre vigtige talteoretiske opdagelser, eller til en idé, der kunne påpege særlige tilfælde, hvor sætningen var sand. Den første matematiker, der for alvor revolutionerede studiet af Fermats sidste sætning var Sophie Germain.⁴ Hendes indsats overgik enhver af hendes mandliges kollegaers indtil da – en bedrift, der er i lyset af det samfund, hun levede i, er øjensynligt større end som så. Sophie Germain levede i Frankrig i årene 1776-1831. Her blev kvinderne først og fremmest betragtet som naiv, uvidende og uskyldig underholdning for mændene og skulle desuden helst holde sig inden for hjemmets 4 vægge.

Denne udbredte opfattelse gjorde, at kvinder med uddannelse var ildeset. De ansås ganske enkelt ikke for at besidde de nødvendige abstraktions- og koncentrationsevner, som især de matematiske og fysiske videnskaber krævede. Følgelig blev de, så vidt det var muligt, udelukket fra sådanne studier.⁵ At frigøre sig fra disse opfattelser var for langt de fleste kvinder en uoverkommelig opgave, og faktisk var Sophie Germain den eneste franske kvinde, der på dette tidspunkt tog kampen op.

Den Franske Revolution brød ud, da hun var 13 år gammel. Men i en periode præget af så voldsomme forandringer, nye idéer og kraftige udråb om frihed og lighed, stod kvindesynet – både i forhold til uddannelse og i mere generel forstand – i bemærkelsesværdig kontrast.

At de revolutionære tænkere formåede at lade de to tilsyneladende modsætninger gå hånd i hånd, må skyldes deres skæven til oplysningstidens store filosofiske tænkere. Denne periode havde præget 1700-tallet helt frem til revolutionens begyndelse og åbenlyst betegnet kvinder som "ufuldstændige mænd" og "voksne børn".⁶ Sophie Germain's forudsætninger for en succesfuld matematisk karriere var altså stort set ikkeeksisterende. Man kan fristes til at tro, at det var et liv fyldt med svære udfordringer, der gav hende styrken til at pådrage sig den sværeste af dem alle: at bevise Fermats sidste sætning.

¹ Hansen, Johan P., Henrik Gadegaard Spalk: *Algebra og talteori*, Gyldendal, 2002, s. 96

² Singh, Simon: *Fermats store sætning*, Gyldendal, 1997, s. 87

³ Det fulde bevis er tilgængeligt på denne hjemmeside. Det siges at indeholde samtlige kendte idéer i talteorien. Lek-Heng Lim: *The proof of Fermat's last theorem*, Stanford University – Department of Mathematics, <http://math.stanford.edu/~lekheng/flt/index.html>

⁴ Singh, s. 128

⁵ Osen, Lynn M., *Women in Mathematics*, The Massachusetts Institute of Technology, 1974, s. 51

⁶ Mozans, H.J.: *Women in Science*, University of Notre Dame Press, 3. udgave, 1991, s. 92

Den Franske Revolution og kvinderne⁷

Den Franske Revolution havde afgørende betydning for samfundet, som vi kender det i dag – ikke blot i Frankrig, men også på overordnet europæisk plan. Man taler om, at den ligefrem definerede begrebet ”revolution”, idet man med denne overvældende række af begivenheder én gang for alle beviste, at det var muligt for folket at vælte et magtfuldt styre. Revolutionens mest fundamentale idéer var de brændende ønsker om frihed og lighed, men bestræbelsen på at opnå disse ønsker førte de mest grufulde og brutale metoder med sig. Det var folkets kamp om at kræve den politiske magt, de i så høj grad så sig berettiget til, og de politiske og ideologiske følger af dette folkeoprør er stadig at finde i samfundet den dag i dag.

Man kan nemt lade sig forblinde af de banebrydende idéer, der umiddelbart så ud til at gøre op med hver eneste af det gamle, franske hofsamfunds normer. Men lige under overfladen lurede det egentlige frihedsprincip – det ekskluderende og begrænsende, der fuldstændigt udelukkede halvdelen af samfundets indbyggere, kvinderne. Der var ellers ikke mangel på engagerede kvinder med revolutionære sind, men revolutionens fokus kunne ganske enkelt ikke ligge længere væk fra en kvindelig emancipation. For at forstå denne foranderlige periode i den franske historie, må blikket altså vendes mod den mere overordnede opbygning af samfundet, og så bide mærke i de få, kvindelige udråb, der trods alt forsøgte af nå op til overfladen undervejs.

I 1700-tallet var Frankrig et land med dyb, social adskillelse, idet landet holdt fast i det gamle, traditionsrige stændersamfund: gejstligheden øverst, dernæst adelen og nederst i hierarkiet fandt man borgerskabet. Alle, der ikke kunne kalde sig adelige eller gejstlige befandt sig således i tredjestand, og denne store gruppe havde givet også interne forskelle – den borgerlige elite bestående af advokater og forretningsfolk adskilte sig på mange måder fra bønderne på landet. Som mange andre lande i Europa var der tale om en enevældig stat, hvor kongen var indsat af Gud, havde uindskrænket magt og ikke var underlagt forfatninger af nogen art. At førstestand bestod af gejstligheden betød, at kirken og troen styrede de fleste menneskers dagligdag, ligesom den stod for al undervisning. I det franske samfunds sociale adskillelse var det centrale element de såkaldte privilegier, der kun gjaldt kirken og adelen. Vigtigst var første- og andenstand fritaget for at betale skat, og samtidig sad adelen på al juridisk magt i lokalsamfundet. Disse tre ting: den enevældige konge, kirkens altoverskyggende rolle og de afgørende privilegier, gennemgik alle en fuldstændig forandring under Den Franske Revolution.

Revolutionen begynder, og kvinderne tager til Versailles

De revolutionæres idé om, at folket besad den politiske magt, var i virkeligheden en videreførelse af budskabet fra Den Amerikanske Uafhængighedserklæring fra 1776, og det var også Frankrigs indblanding i denne uafhængighedskrig, der indirekte udløste revolutionen. Krigen, hvor Frankrig støttede de amerikanske oprørere, blev så kostbar, at den førte til en alvorlig statsbankerot. I 1789 fandt kongen det nødvendigt at indkalde til en stænderforsamling, hvor alle tre stænder i fællesskab skulle blive enige om at godkende en række reformer, der kunne redde den økonomiske situation. Repræsentanterne fra tredjestand var givet i flertal, og af frygt for kritik fra denne nederste stand blev det besluttet, at de på trods af deres flertal ikke fik flere stemmer end adelen og kirken. Men beslutningen mødte så stor modstand, at tredjestand i stedet erklærede sig selv for en Nationalforsamling, der repræsenterede hele nationen. Dette markerede en politisk ophævelse af enevælden: suveræniteten var flyttet fra kongen, og revolutionen sat i gang. Der gik ikke lang tid før revolutionen blev bevæbnet, for skal en sådan erklæring holdes i live, må den forsvares. Derfor stormede parisiske oprørere d. 14. juli et gammelt fængsel, Bastillen, der stod som symbol

⁷ Dette afsnit bygger overordnet på disse to bøger:

- Adriansen, Inge, m.fl.: *Fokus – kernestof i historie 2: Fra oplysningstid til imperialisme*, Gyldendal, 2007, kapitel 3 ”Revolutioner”
- Frederiksen, Peter, m.fl.: *Grundbog til historie, Verdenshistorien 1750-1945*, Systime, 2001, kapitel 1 ”De store revolutioner 1750-1850”

på enevælden, og desuden var lager for en hel del våben. ”Bastille-dagen” er senere blevet Frankrigs nationaldag.

De parisiske oprørere følte dog deres kamp besværliggjort af, at både kongen og Nationalforsamlingen befandt sig i Versailles, og i oktober samme år forårsagede dette en demonstration, hvor de ellers så ubetydelige kvinder pludselig kom i fokus. En stor gruppe kvindelige demonstranter dannede et kvindetog, der vandrede 20 km fra Paris til Versailles. Her ville man tvinge begge parter til at tage med tilbage til Paris, så folket nemmere kunne lægge pres på dem. Ifølge en af demonstranterne, Marie-Louise Lenoël, mødte de kvindelige demonstranter stor ros og opbakning fra borgerne: *”De roser kvinderne for, at de er kommet og opfordrer dem til at fortsætte med at arbejde for det almene vel. Tænk bare – at franske kvinder, anført af Bastille-heltene, skulle opleve af få en sådan opfordring!”*⁸ Kvindetoget var en succes. Det lykkedes at tvinge parterne til hovedstaden, ligesom 10 borgerinder – ganske vist under ledelse af to mandlige Bastille-kæmpere – fik tvunget Nationalforsamlingen til at vedtage konkrete løfter om at forbyde eksport af korn, samt efterkomme kvindernes ønsker om rimelige kornpriser og en maksimal pris på kød.

Kvindetoget er det klare eksempel på, at kvinderne under Den Franske Revolution i ligeså høj grad som mændene tog stilling til problematikkerne og kæmpede for frihed, men selve aktionen var ikke fremmede for tidens kvindeopfattelse. Dette handlede om almenvellet, som Marie-Louise Lenoël også antyder. Det har utvivlsomt været opmuntrende for de kvindelige deltagere, men resultatet kom revolutionen og ikke kvindekampen til gode.

Kvinderettighedserklæringen

Et par måneder forinden Kvindetoget til Versailles havde Nationalforsamlingen vedtaget Menneskerettighedserklæringen, ”Déclaration des Droits de l’Homme et du Citoyen”. Den skulle fungere som et slags ”arbejdspapir” for den forfatning, forsamlingen ville udforme, og som trådte i kraft to år senere. Med den første sætning: *”Mennesker fødes og forbliver lige i alle rettigheder.”*⁹, var fundamentet lagt for en erklæring med frihed og lighed som helt centrale budskaber. Man definerede alle menneskers naturlige rettigheder som frihed, ejendomsret, sikkerhed og retten til modstand mod undertrykkelse, mens idéerne om den frie tanke og meningstilkendegivelse også var helt essentielle. De franske revolutionæres inspiration fra Oplysningstidens filosoffer, viste sig også i erklæringen: *”Ethvert samfund, hvor (...) de bestemmende magter ikke er delt, har ingen forfatning”* henviser til den tredeling af magten, der stadig gør sig gældende i dag, nemlig at den lovgivende, udøvende og dømmende magt er adskilt. Denne blev formuleret af Charles de Secondat Montesquieu i 1748 og har dannet ideologisk grundlag for mange revolutionære tænkere siden.¹⁰

Det var allemandsviden, at menneskerettighederne kun gjaldt mænd. Ligeså meget som det var en naturret at være en fri og lige borger, var det en naturret at kvinder på ingen måde besad de samme rettigheder. Da tredjestand erklærede sig Nationalforsamling og krævede juridisk og politisk indflydelse, var det således udelukkende tiltænkt borgerskabets mænd. Men i en revolution, hvor hele folket – mand som kvinde – protesterede og gjorde massive oprør mod styret og samfundets opbygning, kan det ikke undre, at en kvindelig røst på et tidspunkt ville melde sig på banen og kræve de rettigheder, som revolutionen undveg. Kvinderne var midt i en politisk revolution uden nogen som helst form for politisk indflydelse!

I et forsøg på at oplyse sine medsøstre om denne uretfærdighed, udgav slagterdatteren Olympe de Gouges i 1791 Kvinderettighedserklæringen med det passende franske navn ”Déclaration des Droits de la Femme et de la Citoyenne.” Hun tog udgangspunkt i Menneskerettighedserklæringen, men udvidede den til også at

⁸ Frederiksen, Peter, m.fl.: Kildetekst 11: *Kvindetoget i Versailles*, uddrag fra beretning, der bygger på vidnesbyrd et år efter begivenheden, s. 46

⁹ Frederiksen, Peter, m.fl.: Kildetekst 13: *Menneskerettighedserklæringen, 1789*, s. 49

¹⁰ Frederiksen, Peter, m.fl.: Kildetekst 16: *Politisk liberalisme*, udsnit fra værket ”Lovenes ånd” udgivet i 1748 af Montesquieu, s. 55

gælde for kvinder. Første sætning omformulerede hun således til *"Kvinden fødes fri og har de samme rettigheder som manden."*¹¹

Mange af punkterne i de Gouges' udgivelse blev af samfundet opfattet uhørte og stærkt provokerende. Eksempelvis argumenterede hun for kvindens frie meningstilkendegivelse med ordene: *"Kvinden kan gå på skafottet"*¹²; *derfor skal hun også have ret til at gå på talerstolen.* Hun krævede ligeledes, at ytringsfriheden skulle give enhver kvinde ret til at afsløre faderskabet til et uægte barn – et krav, der skabte voldsomme protester blandt alle samfundets mænd.

For at forstå farligheden i et sådant opråb, er det nødvendigt at se det i lyset af den kontrol med befolkningen, der i årene efter 1791 førte til direkte udemokratiske håndteringer af "statsfjendtlige interesser". Kongen befandt sig jo på dette tidspunkt i Paris, og hans opholdssted, Tuilerierne, blev i 1792 stormet af den yderliggående militære underklasse, sansculotterne. Denne handling førte til kongens henrettelse ved guillotinen d. 21. Januar 1793. Symbolsk holdtes hans hoved ud over folkemængden: ved at halshugge kongen havde man halshugget hele det samfund, som kongen legemliggjorde på den drastisk tænkeligste måde.

Med handlingen kulminerede revolutionens brutaliteter, idet advokaten Maximilien Robespierre nu stillede sig i spidsen for det såkaldte "Rædselsherredømme", der indtil juli 1794 kom til at hænge Frankrig. Revolutionen, der året forinden officielt havde udråbt Frankrig til republik, blev et mål i sig selv, som skulle opretholdes for enhver pris. Ligesom frihedsbegrebet fra begyndelsen havde ekskluderet kvinderne, ekskluderede den frie tanke nu også alle dem, hvis tanker var anti-revolutionære.

Med Kvinderettighedserklæringen havde Olympe de Gouges allerede brudt mange grænser, som de fleste revolutionære ledere ønskede at bevare¹³. Derudover havde hun udgivet andre værker, der sympatiserede med den politiske gruppe Girondinerne, der var imod afgørende dele af Robespierres politik, heriblandt de mange henrettelser i statsfjendtlighedens navn samt den fulde afskaffelse af monarkiet. I 1793 blev hun arresteret, dømt for forræderi og henrettet ved guillotinen. I hendes retssag blev hun dømt på følgende baggrund: *"Er man tiltalt for at have forfattet værker, der antyder en opløsning af Nationalkonventet, en genetablering af monarkiet eller på anden måde angriber folkets suverænitet, skal man straffes med døden"*¹⁴. Efter hendes død rapporteredes det, at hun tydeligvis havde glemt sin passende rolle og placering som kvinde.¹⁵

Revolutionen slutter, og kvinderne gemmes af vejen

Den Franske Revolution var en meget lang proces, og dette skyldtes nok, at der fra start af ikke var et klart defineret mål. I stedet lod man den ene begivenhed tage den anden, og lod sig bære frem af entydige, ideologiske idealer, der lidt efter lidt gjorde det til en revolution af meget ekstrem karakter.

Derudover var revolutionen utvivlsomt et mandeforetagende. Kvinderne var helt udelukkede fra det politiske liv, på trods af, at de var synlige og aktivt deltagende i alle revolutionens lag – lige fra sansculotternes dramatiske aktioner til de adeliges beklagelser om afskaffelsen af privilegierne.¹⁶ I revolutionens ånd oprettede de, som mændene, politiske klubber, der ivrigt diskuterede og ønskede indflydelse på linje med

¹¹ Frederiksen, Peter, m.fl.: Kildetekst 14: *Kvinderettighedserklæringen, 1791*, s. 50

¹² Et skafot var den platform, hvorpå en dødsdømt blev henrettet.

¹³ Lewis, Jone Johnson: *Olympe de Gouges and the Rights of Women*, About.com – part of the New York Times Company, 2009, <http://womenshistory.about.com/od/olympedegouges/a/Olympe-De-Gouges-And-The-Rights-Of-Woman.htm>

¹⁴ Det oprindelige referat af retssagen mod Olympe de Gouges: *The trial of Olympe de Gouges, 1793*, fundet på internetsiden "Liberty, equality, fraternity – exploring the French Revolution", Center for history and new media, <http://chnm.gmu.edu/revolution/d/488/>

¹⁵ Lewis, Jone Johnson: <http://womenshistory.about.com/od/olympedegouges/a/Olympe-De-Gouges-And-The-Rights-Of-Woman.htm>

¹⁶ Frederiksen, Peter, m.fl.: Kildetekst 12: *Modstand mod afskaffelsen af privilegierne*, uddrag fra hofdame Madame de La Tour du Pins erindringer, s. 48

deres mandlige medrevolutionære. Men disse lukkedes allerede under Robespierre, der i stil med den generelle opfattelse ikke ønskede, at kvinderne skulle markere sig uden for hjemmet. Pusten blev endegyldigt taget fra de franske kvinder under det militærstyrede diktatur, der opstod med generalen Napoleon Bonaparte i 1799, idet han fik juridisk fastslået, at manden var familiens overhoved, og kvinder til hver en tid var underlagt enten faderen eller ægtemanden. Disse patriarkalske opfattelser kom til at dominere i en sådan grad, at de franske kvinder først opnåede valgret i 1945.¹⁷

Det oplyste og det revolutionære syn på uddannelse og videnskab

På trods af den manglende revolution af kvindeopfattelsen, opstod der umiskendeligt en overordnet destruerende tendens i forbindelse med revolutionens udvikling. Idéen om, at alle de komponenter i samfundets opbygning, der eksisterede før revolutionen, skulle ændres, var gennemgående.¹⁸ På den måde styrkede man budskabet om nye, bedre tider i Frankrig.

Det skarpe opgør med kirken og religionen medførte radikale ændringer i fransk uddannelse. Forud for revolutionen varetog den katolske kirke – den højeste stand – al undervisning, og således var studier givet domineret af religiøse verdensopfattelser frem for reelle videnskabelige forklaringer.

Dette system blev for alvor problematisk, da Oplysningstiden, også kaldet Rationalismen, og dets tænkere gjorde sit fremtog. Som den tyske filosof Immanuel Kant formulerede det, handlede denne periode om at ”gøre op med menneskets selvforskyldte umyndighed”¹⁹, ligesom han påpegede to helt centrale idéer: troen på fornuften og forpligtelsen til at forholde sig kritisk over for autoriteterne. Idet gejstligheden i den grad var en autoritet i det gamle, franske samfund, og religion – i hvert fald set udefra – bygger på irrationalitet frem for fornuft, var det kirkelige opgør uundgåeligt. Der begyndte at opstå tvivl i takt med rationalismens indtog, og den store filosof Voltaire udtalte direkte at ”Teologi morer mig. Der finder vi det menneskelige vanvid i fuld opblomstring.”²⁰ Oplysningstiden førte en helt ny bevidsthed om viden med sig – en viden, der givet var et resultat af uddannelse.

Naturvidenskabens offentlige gennembrud kom i 1687 da fysikeren Isaac Newton udgav sit hovedværk *Principia Mathematica*, som vigtigst præsenterede tyngdeloven.²¹ Det kulminerede i årene 1751-1772, hvor 200 specialister – encyklopædisterne, som de kaldte sig – med filosofen Denis Diderot i spidsen udgav ”Den Franske Encyklopædi”, hvis formål var at samle al menneskets viden, og gøre det tilgængeligt for den almindelige borger.²²

Med Oplysningstidens ændrede holdning til både kirke og uddannelse var forandringerne under Den Franske Revolution stort set uundgåelige. Kirkeopgøret var allerede synligt med Nationalforsamlingens suverænitetserklæring, men uddannelse var ikke noget, der aktivt kom på dagsordenen før langt inde i den revolutionære proces. Som sagt var revolutionen først og fremmest af politisk og ideologisk karakter, og behandlede således samfundsændringer på et mere overordnet plan. Men efter Robespierres fald i 1794, blev der taget initiativer til et nyt, centraliseret skolesystem, ”écoles centrales”, hvor magtens overtagere, Nationalkonventet, nedsatte en komité, der var ansvarlig for at lægge fælles retningslinjer.²³ Derudover etablerede man de såkaldte ”grandes écoles”, hvor undervisningen var på elitært niveau, og eleverne skulle udmærke sig akademisk for at blive optaget. En af disse skoler var den naturvidenskabelige ”École Polytechnique”. Formålet fra statens side var at give eleverne sekulære værdier, og i bedste fald ansætte dem til at varetage statslige interesser.²⁴

¹⁷ Hvornår fik verdens kvinder valgret?, Kvininfo, <http://www.kvininfo.dk/side/508/>

¹⁸ Markham, J. David: *The Revolution, Napoleon and Education*, The International Napoleonic Society, 2005, http://www.napoleon-series.org/ins/markham/c_education_m.html#16

¹⁹ Adriansen, Inge, m.fl., s. 34

²⁰ Adriansen, Inge, m.fl., s. 40

²¹ Adriansen, Inge, m.fl., s. 41

²² Adriansen, Inge, m.fl., s. 43

²³ Markham, J. David, http://www.napoleon-series.org/ins/markham/c_education_m.html#16

²⁴ ”The major periods in the School history”: *Revolutionary beginnings*, École Polytechnique, <http://www.polytechnique.edu/home/about-ecole-polytechnique/history-and-heritage/the-major-periods/the-major-periods-in-the-school-history--23918.kjsp?RH=1262193092595>

De Lærde Kvinder

Det forholdt sig med uddannelse nøjagtigt som det forholdt sig med menneskerettigheder og politisk indflydelse: tiden omkring revolutionen rummede mange fortalere for begge emner, lige indtil det blev sat i forbindelse med kvinder. Oplysningsfilosoffernes rationelle tankegang ophørte med ét og blev erstattet af udtalelser som *"Det er ikke anstændigt, af så mange årsager, at en kvinde skal studere og vide så mange ting"*²⁵. Disse ord af den store, respekterede tænker Jean-Jacques Rousseau repræsenterer fuldstændig datidens holdning til lærde kvinder. Der var udbredt enighed om, at alle kvinder var naturens væsner og mest attraktive, når de var upåvirkede og naturlige. Med andre ord var en uddannelse ganske enkelt unødvendig, og en kvinde burde faktisk prale af at være uuddannet.²⁶

I 1672 udgav en af tidens største komediedigtere, Molière, en komedie med titlen *"Les Femmes Savantes"* (*"De Lærde Kvinder"*), der blev ekstremt populær. Formålet var angiveligt, at stykket skulle latterliggøre de overfladiske kvinder, der bevidst gjorde omverdenen opmærksom på deres manglende viden. Desværre var det langt fra dette budskab, det store publikum tog med sig hjem.²⁷ Molière anvendte en ironi, der ikke kom igennem, og i stedet blev det opfattet som en direkte latterliggørelse af lærde kvinder. Der kom for alvor fokus på kvinder og uddannelse, men på den værst tænkelige måde.

Populariteten gjorde, at komediens diskriminerende replikker blev en samfundsaccepteret holdning til emnet, og de anerkendte oplysningsfilosoffer tog oftest udgangspunkt i Molières formuleringer, når de efterfølgende udtalte sig. *"Les Femmes Savantes"* havde altså alvorlige konsekvenser for kvinders muligheder for uddannelse: De mistede modet til at forsvare deres køn, og selv hvis de besad reel viden og uddannelse, skjulte de det af frygt for hån og diskrimination. Derfor skulle der de næste to århundreder findes ganske få lærde kvinder i Frankrig – Sophie Germain er en af de sjældne undtagelser²⁸.

Med denne samfundsudvikling blev det eneste sted, hvor intellektuelle, højtstående kvinder kunne dele deres interesser med ligesindede, de såkaldte saloner. Frankrigs første saloner dukkede op i Paris allerede i starten af 1600-tallet, og bestyrerinden, *la salonière*, var typisk en adelig, midaldrende kvinde. Formålet var at samle den intellektuelle elite bestående af forfattere, filosoffer, videnskabsmænd og kunstnere – af begge køn – der her kunne diskutere og udveksle idéer. Alle salonens besøgende kunne komme til orde og bestyrerinderne blev kaldt dronninger af det intellektuelle Europa.²⁹ Under revolutionen diskuteredes ofte politik, og salonerne var det eneste sted, en kvindes politiske holdning reelt kunne blive hørt. Alligevel hersker der tvivl om, i hvor stort et omfang salonernes mandlige besøgende respekterede de kvindelige. I stedet findes den teori, at de intellektuelle diskussioner først og fremmest foregik mellem mændene, mens kvinderne i langt højere grad ansås som underholdning og distraheren.³⁰ Selvom deres underlegenhed med denne udlægning fortsat dominerede, var de unægteligt velkomne i de intellektuelle saloner, hvilket trods alt var et venligere sted end det fjendtlige samfund, der fulgte efter Molières komedie. Det følgende uddrag fra stykket giver et godt billede af, hvad kvinderne var oppe imod:

*"Our fathers, on this point, showed great good sense;
They said a woman always knows enough
(...)
Their wives, who couldn't read, led honest lives,
Their households were their only learned theme,
And all their books were thimble, thread and needles
With which they made their daughters' wedding outfits."*³¹

²⁵ Mozans, H.J.: *Women in Science*, University of Notre Dame Press, 1913, 3. udgave, 1991, s. 93

²⁶ Perl, Teri: *Math Equals*, Addison-Wesley Publishing Company, 1978, s. 53

²⁷ Mozans, H. J., s. 86

²⁸ Mozans, H.J., s. 87

²⁹ Høffding, Niels: *Revolutionen, Napoleon og kvinderne*, Gyldendal, 2001 – i bogens første kapitel findes en beskrivelse af salonkulturen

³⁰ Mozans, H. J., s. 92

³¹ Molière: *Les Femmes Savantes*, 1672, akt II, scene 7 – trykt i Mozans, H.J.: *Women in Science*, s. 86

*"A learned woman ought – so I surmise –
Conceal her knowledge or she'll be unwise."*³²

Budskabet blev taget uhyre bogstaveligt – man værnede om de gamle, patriarkalske værdier, og fjendtligheden mod lærde kvinder bestod gennem hele revolutionen.

Hvis kvinder fik nogen form for uddannelse, var det først og fremmest af huslig og meget elementær karakter, og de var fuldstændigt udelukket fra universiteterne. Det vigtigt at bide mærke i, at al denne fjendtlighed rettede sig mod de adelige kvinder – uddannelse var ganske vist ildeset, men dog ikke helt umuligt. De fleste adelige piger blev sendt på klosterschule som 5-årige, og så taget ud 10 år senere til et passende ægteskab.³³ Der fandtes også enkelte reelle pigeskoler: den første af slagsen, Institut de Saint-Cyr, blev grundlagt i 1684. Grundlæggeren, Madame de Maintenon, ansås for at være en af tidens mest oplyste kvinder, men undervisningens indhold var stadig ikke overvældende.³⁴ Alt dette var slet ikke til overvejelse, hvis kvinderne var fattige. Man mente, at undervisning under ingen omstændigheder skulle overgå mulighederne for beskæftigelse, og at *"de fattige kvinder således slet ikke har brug undervisning"* som Rousseau udtalte og andre respekterede oplysningsfilosoffer, herunder encyklopædisterne og Voltaire, skulle have gjort sig enige i med ordet "Amen."³⁵

Det kan virke en smule paradoksalt, at Oplysningstidens største modstandere af kvindelig uddannelse selv var tidens mest fremtrædende og lærde videnskabsmænd. Det viser nøjagtigt hvor indgroet opfattelsen af kvinders underlegenhed egentlig har været i samfundets sociale rygrad. Især Voltaire var en modsætningsfyldt mand, idet han i årevis levede sammen med kvinden Emilie du Châtelet, en stor matematisk fysiker, der er mest kendt for at oversætte Newtons "Principia Mathematica" til fransk og befandt sig på et ligeså højt intellektuelt niveau som Voltaire selv. Hun var et glimrende eksempel på, at viden ikke afhang af køn, men af evner.³⁶

Dog var det faktisk forventet, at kvinder, hvis baggrund havde en vis social status, havde et sådant kendskab til videnskab og naturvidenskabelige discipliner, at de kunne konversere om det til "selskabsbrug". Til dette formål blev der skrevet lærebøger, som skulle holde kvinderne i de højere sociale lag opdateret om fagenes udvikling. Det klassiske eksempel er forfatteren Francesco Algarotti, der udgav "Isaac Newtons filosofi forklaret til brug for damer". Konceptet byggede på en overbevisning om, at kvinder kun var interesserede i romantik, og beskrivelsen af Newtons love udspillede sig derfor som en flirtende dialog, mens afstandskvadratloven blev forsøgt sammenlignet med den måde, hvorpå kærlighed aftog med tiden.³⁷

Den mest ekstreme modstander af lærde kvinder skulle dog vise sig at være den revolutionære tænkere Sylvain Maréchal, der på flere områder var en mand af ekstremer. Under revolutionen var han en massiv fortaler for lighed, og så længe dette bestod, kunne alt andet være ligegyldigt. Idealet kom for alvor til udtryk, da han i 1796 udgav "Manifests des Egaux", der indeholdt udsagn som *"Vi gør krav på, at leve og dø lige, sådan som vi var født: vi vil have ægte lighed eller død; det er dét vi behøver."*³⁸ I 1801 skulle det dog vise sig, at hans egalitarisme – på trods af et helt manifest om lighed – var meget begrænset. Dette år udgav Maréchal nemlig "Projet d'une Loi portant Défense d'Apprendre à Lire aux Femmes", som foreslog en lov, der forbød kvinder at lære at læse. Ligeså meget som han ønskede lighed, ligeså lidt ønskede han, at kvinder modtog undervisning.

³² Akt III, scene 7

³³ Perl, Teri, s. 29

³⁴ Osen, Lynn M., s. 49

³⁵ Mozans, H. J., s. 93

³⁶ Perl, Teri, s. 29

³⁷ De kvindelige lærebøger beskrives i Singh, Simon: *Fermats store sætning*, s. 128

³⁸ Maréchal, Sylvain: *Manifesto of the Equals*, 1796, det oprindelige manifest fundet på internetsiden <http://www.marxists.org/history/france/revolution/conspiracy-equals/1796/manifesto.htm>, en del af det såkaldte Marxists Internet Archive, besøgt d. 07-12-2011. Manifestet er oversat i 2004 af Mitchell Abidor

Han udtalte i forbindelse med forslaget at: *"Kvinder, der ikke er i stand til at læse, laver den bedste suppe. Jeg ville hellere have en kone med skæg, end en kone, der er uddannet."*³⁹
 Det vides ikke, om Sylvain Maréchal var gift.

Matematikkens kvinder

*"Alle abstrakte spekulationer, al tør viden, uanset hvor brugbar den end er, må overlades til mandens arbejdsomme og solide sind... Derfor vil kvinder aldrig kunne lære geometri"*⁴⁰

Lad os snævre videnskaben ind til et specifikt område: matematikkens. Med dette citat af oplysningsfilosoffen Immanuel Kant er kvinders påståede udelige forstand stadig i fokus – matematikkens abstrakte karakter ansås ganske enkelt uden for kvindens intellektuelle rækkevidde.

Myten om matematik som mandens domæne levede i bedste velgående, og denne opfattelse delte de fleste af samfundets kvinder faktisk også. Matematisk uvidenhed blev følgelig værdsat som en form for social, feminin ynde.⁴¹

Matematisk anerkendelse har historisk aldrig været overvældende. Navne som Tolstoy, Beethoven og Darwin vil unægtelig klinge i fleres ører end deres matematiske ligemænd Gauss, Cauchy og Euler. Matematikken er utvivlsomt blandt de sværest tilgængelige videnskaber, og derfor har det været svært for selv mandlige matematikere at opnå fortjent anerkendelse – på trods af, at mange andre discipliner bygger på matematiske principper.

Men hvis mænd har haft få belønninger for deres matematiske opdagelser, har kvinder haft færre. Som følge af samfundets udbredte fjendtlighed og kvindernes egen forlegenhed, blev kvindelige præstationer – hvis de fandtes – forbigået. Kvinder skulle finde sig i at blive irettesat af samfundet, hvis de forsøgte at udmærke sig akademisk og især i det matematiske felt. Hvis fordommene skulle bekæmpes, krævede det et mod og en udholdenhed, som kun få kvinder besad.⁴²

Sophie Germain

I 1776 blev parisiske Sophie Germain født. Hun skulle senere blive en stor matematiker, men vejen besværliggjordes af samfundets problematiske kvindesyn. Hun var således et godt eksempel på, hvor svær den akademiske anerkendelse var for en kvinde i Frankrig på dette tidspunkt. Germain var 13 år da Den Franske Revolution brød ud og Paris' gader fyldtes med utilfredse og voldelige demonstranter. Hendes familie var ikke adelig, men alligevel blandt de rigere, og hendes far ejede et stort bibliotek. Her tilbragte hun mange af de revolutionære år – i sikkerhed, men også i ensomhed. Hun endte med at læse samtlige af bibliotekets bøger om matematik og således var det gennem selvstudier, dag og nat, at matematikken blev hendes liv.⁴³ Hendes vilje og stædighed var ligeså bestemt som de revolutionæres, hvilket for alvor kom til udtryk, da forældrene forsøgte at forhindre hendes studier. De misbilligede deres datters usædvanlige og socialt uacceptable disciplin, og om natten slukkede de derfor for varmen og konfiskerede både tøj og stearinlys for at tvinge hende væk fra de matematiske værker. Men efter alligevel at have fundet hende tilstrækkeligt mange vintermorgener ved sit skrivebord svøbt i tæpper og med et frossent blækhud i hånden, gav de endelig efter. Germain var så passioneret, at der skulle mere end lidt nattefrost til at slå hende ud – og uden denne vilje havde hun umuligt kunne kæmpe sig vej op i den matematiske verden.⁴⁴

Mens revolutionen forløb på den anden side af bibliotekets 4 vægge, udviklede hun sit talent. En populær beskrivelse af hendes foretagender i den revolutionære tid er, at hun *"spent the years of the Reign of Terror studying differential calculus"*⁴⁵. Hun var dermed mere end egnet og dybt betaget af den elitære, naturvidenskabelige École Polytechnique, der åbnede i Paris i 1794. I tidens ånd var den dog udelukkende

³⁹ Mozans, H. J., s. 93

⁴⁰ Mozans, H. J., s. 135

⁴¹ Osen, Lynn M., del af forordet

⁴² Afsnittet bygger på introduktionen i Osen, Lynn M.: *Women in Mathematics*, s. 1-9

⁴³ Perl, Teri, s. 64

⁴⁴ Singh, Simon, s. 129

⁴⁵ Findes både i Osen, Lynn M.: *Women in Mathematics*, s. 85 og i Perl, Teri: *Math Equals*, s. 64

for mænd, og Germain fik således aldrig muligheden for den universitetsuddannelse i matematik, hun i den grad fortjente. Det lykkedes hende dog at skaffe noter fra flere af professorernes forelæsninger, og under pseudonymet Monsieur Le Blanc afleverede hun en skriftlig opgave til matematikeren Lagrange, da hans kursus sluttede. Opgaven var meget imponerende, og da Lagrange ville møde ophavsmanden, måtte hun afsløre sin sande identitet. Lagrange reagerede meget atypisk og blev en stor støtte og opmuntring for Germain's efterfølgende matematiske bedrifter. Efter mødet med Lagrange blev hun introduceret til flere franske videnskabsmænd, og herefter bestod hendes uddannelse primært af brevvekslinger med andre lærde, bl.a. Adrien-Marie Legendre. Det var med hans udgivelse af værket *Théorie des Nombres* i 1798, at hendes interesse for talteori for alvor blev vækket.⁴⁶

Dette førte til, at hun i 1804 tog kontakt til ”matematikeren over dem alle”⁴⁷, Carl Friedrich Gauss, der tre år forinden havde udgivet det store talteoretiske værk *Disquisitiones Arithmeticae*. Hun vedlagde sin egen, talteoretiske forskning, herunder hendes foreløbige arbejde med Fermats sidste sætning. Endnu engang anvendte hun pseudonymet M. Le Blanc ”for at undgå latterliggørelsen, der var knyttet til kvinder, som havde helliget sig til videnskab”, som hun senere udtalte.⁴⁸

Gauss og Germain startede en matematisk korrespondance, og da Gauss 3 år senere opdagede hendes sande identitet, reagerede han ved at afsløre et ekstraordinært tolerant kvindesyn for en videnskabsmand på denne tid: ”Men når en person af det køn, som ifølge vores skikke og fordomme må møde uendeligt mange flere besværligheder end mænd for at gøre sig fortrolig med disse svære videnskabelige undersøgelser, alligevel har held med at overvinde forhindringerne og trænge igennem til de mest tilslørede områder af matematikken, må hun utvivlsomt besidde det ædlest mod, ekstraordinære talenter og en overlegen genialitet.”⁴⁹

Da korrespondancen med Gauss sluttede, arbejdede hun fortsat med Fermats sidste sætning, men den talteoretiske forskning blev dog sat i baggrunden i en årrække, hvor Germain i stedet kastede sig over matematisk fysik. Frankrigs anerkendte videnskabsakademi, der også blev oprettet under Den Franske Revolution som et af de elitære uddannelses tiltag, udstedte i 1808 en pris til den, der kunne formulere en matematisk teori om elastiske pladers svingninger. Denne pris blev tildelt Germain 8 år senere, dog med en del kritik af hendes arbejde undervejs. Herefter blev hun inviteret til at deltage i enkelte semestre på det anerkendte akademi, hvilket var den største ære, institutionen nogensinde havde skænket en kvinde.⁵⁰

Sophie Germain blev aldrig gift. Hendes dedikation til matematikken var alt for kontroversiel og slet ikke attraktiv for tidens mænd. Men ved at vælge ”laboratoriet og biblioteket frem for salonen og soveværelset”⁵¹, blev hun en af de mest dybsindigt intellektuelle kvinder, Frankrig nogensinde havde produceret. Anerkendelsen blev dog aldrig komplet, som det også fremgik af hendes dødsattest fra 1831. Her blev hun betegnet som ”rentière-annuitant” (enlig kvinde uden profession), og ikke ”mathématicienne”. Da Eiffeltårnet blev bygget og anvendte afgørende viden om materialernes elasticitet, var hun ikke en af de 72 lærde, hvis navn blev indgraveret på bygningsværket. Hun mødte megen utaknemmelighed på trods af hendes misundelsesværdige videnskabelige indsats. En utaknemmelighed, der i høj grad hvilte på hendes ”forkerte” køn.⁵²

⁴⁶ Osen, Lynn M., s. 85

⁴⁷ Singh, Simon, s. 131

⁴⁸ Mozans, H. J., s. 155

⁴⁹ Perl, Teri, s. 66

⁵⁰ Osen, Lynn M., s. 90

⁵¹ Osen, Lynn M., s. 92

⁵² De afsluttende bemærkninger om Sophie Germain bygger på H.J. Mozans, s. 135

Fermats sidste sætning

"Beviset for umuligheden af Fermats sidste sætning, har (...) ofte plaget mig. Jeg har en vag anelse om en forbindelse mellem modulær aritmetik og denne berømte ligning."⁵³ Således skrev Sophie Germain i et brev til Gauss, da hun i 1819, adskillige år efter deres oprindelige brevveksling endte, endelig mente, at hun var nået et gennembrud med hendes arbejde med sætningen. Pierre de Fermat havde selv mange år tidligere bevist sætningen i tilfældet med eksponenten $n = 4$, mens Euler i 1700-tallet beviste tilfældet $n = 3$,⁵⁴ men Germain var den første, der kunne præsentere generelle resultater, gældende for en større mængde af eksponenter.

Inden en uddybning af Sophie Germains bidrag, spoles først et par århundreder tilbage. Som nævnt indledningsvis påstod Fermat i 1637 at

$$x^n + y^n = z^n$$

ikke har positive heltalsløsninger for $n > 2$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

Hermed tog han udgangspunkt i Pythagoras' fundamentale ligning:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

der har uendeligt mange heltallige løsninger, de såkaldte Pythagoræiske tripler. Et eksempel på en tripel er (3,4,5), idet:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

og da der for ethvert positivt heltal k gælder:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

er løsningmængden uendelig. Mere generelt kan man opskrive, at hvis (x,y,z) er en pythagoræisk tripel, er det samme gældende for (kx,ky,kz) .

Det er dette udgangspunkt, der gør, at Fermats sidste sætning er så enkel at forstå og dermed meget unik: normalt vil halvdelen af vanskeligheden for en sætning af denne sværhedsgrad være at forstå spørgsmålet. I stedet foretog Fermat blot en meget lille ændring – og ved at erstatte Pythagoras' ligning med et hvilket som helst naturligt tal højere end 2, forvandlede ligningen fra at have uendeligt mange til at have ingen løsninger overhovedet.⁵⁵

Generelt gjaldt det altid Fermats arbejde, at han skrev nøjagtigt så meget ned, at han var sikker på selv at have indset løsningen – herefter udelod han alle resterende detaljer. Han blev af de samtidige andre matematikere anset for uhyre arrogant, idet han aldrig ulejlignede sig til at inddrage omverdenen ordentligt i hans opdagelser. Først da sønnen udgav hans bemærkninger i 1670, blev det klart, hvor mange genialiteter, denne mand havde rummet – men de manglende detaljer gjorde, at matematikere nu måtte fuldføre overflødhedshornet af sætninger og beviser ét for ét. En udfordrende, men mulig opgave for dem alle – undtagen denne ene sætning, værkets *sidste* uden et fuldstændigt bevis.

Det var det faktum, at denne store, respekterede, verdensberømte talteoretiker så overbevisende havde påstået eksistensen af sætningens "vidunderlige" bevis, at matematikere blev ved med at forsøge at indse det. I sætningens 350 år lange historie levede drømmen altid et eller andet sted, i en eller anden matematikers hjerte.

Da det endelige bevis blev præsenteret af Andrew Wiles i 1995, byggede det dog på mange principper, der først blev opdaget længe efter Fermats død. Wiles udtalte efter udlægningen af hans bevis, at "*der er ingen mulighed for, at Fermat har kendt dette bevis. Det kunne kun opdaget af en matematiker fra det 20. århundrede*"⁵⁶. Dermed sås der tvivl, om Fermat egentlig havde et skudsikkert bevis, eller blot en af de mange idéer, anerkendte matematikere senere præsenterede, men som viste sig at være uholdbare. Et andet sted i Fermats bemærkninger til Diophantos' talteoretiske værk fandtes nemlig et bevis for sætningen i

⁵³ Laubenbacher, Reinhard, m.fl.: *Mathematical Expeditions : Chronicles by the explorers*, Springer, 1999, s. 187

⁵⁴ Laubenbacher, Reinhard, m.fl., s. 166

⁵⁵ Singh, Simon, s. 85

⁵⁶ Dette afsnit bygger på dokumentarfilmen fra BBC: *Fermat's last theorem*, instrueret af Simon Singh, 1996

specialtilfældet $n = 4$, og det er muligt, at han antog, at metoden til dette bevis kunne overføres til et fuldstændig gyldigt.

Bevis for sætningen i tilfældet $n = 4$.

Beviset bygger på læren om de Pythagoræiske tripler, som Diophantos også behandlede i *Arithmetica*. I både Pythagoras⁵⁷ og Fermats tilfælde har vi at gøre med ligninger, der skal besvares med hele tal. Disse kaldes diofantiske⁵⁷, opkaldt efter den store, græske matematiker.

Forud for beviset er det vigtigt at definere nogle talteoretiske begreber, der anvendes undervejs.

Et helt tal d kaldes **divisor** i et andet tal a , hvis der findes et helt tal q , så $dq = a$. Hermed vil d dividere a , hvilket noteres $d \mid a$.

Et **primtal** er et helt tal $a \geq 2$, som ikke har andre divisorer end de trivielle $\pm a$ og ± 1 .

Hvis et tal d er divisor i to hele tal a og b , kaldes d en **fælles divisor** for a og b . De to tals **største fælles divisor** betegnes $sfd(a, b)$. Er $sfd(a, b) = 1$, siges a og b at være **indbyrdes primiske**.

Derudover er det vigtigt at kende **det fundamentale primtalslemma**, der siger følgende om to hele tal a og b og et primtal p :

$$p \mid ab \Leftrightarrow p \mid a \text{ eller } p \mid b$$

og endelig **aritmetikkens fundamentalsætning**, nemlig at ethvert naturligt tal $n > 1$ har en entydig primtalsopløsning. Det vil sige, at n kan skrives som

$$n = p_1 p_2 \dots p_s$$

hvor p_i 'erne er primtal, og at man ved to primtalsopløsninger, $p_1 p_2 \dots p_s$ og $q_1 q_2 \dots q_t$ af n ved passende omordning vil opnå, at $s = t$, og $p_i = q_i$ for $i = 1, 2, \dots, s$ ⁵⁸

Det ønskes altså bevist, at

$$x^4 + y^4 = z^4$$

ikke har heltallige løsninger. Til dette benyttes den fuldstændige løsning til den pythagoræiske ligning, hvilket følgelig bevises først:

Ligningen betragtes:

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x, y, z > 0$$

Første skridt er at reducere løsningerne til de såkaldte **primitive** pythagoræiske tripler (x, y, z) og udnytte, at man kan beskrive samtlige pythagoræiske tripler (kx, ky, kz) herfra (k er ethvert positivt heltal) At en sådan faktisk eksisterer ses eksempelvis ved, at $sfd(3, 4, 5) = 1$.

Om primitive pythagoræiske tripler gælder, at x, y , og z er indbyrdes primiske, dvs. $sfd(x, y, z) = 1$. Af dette vil følge, at enten x eller y – men ikke dem begge – er et lige tal. Antages at x er lige, findes to hele tal s og t med $sfd(s, t) = 1$, så:

$$\begin{aligned} x &= 2st \\ y &= s^2 - t^2 \\ z &= s^2 + t^2 \end{aligned}$$

Dette kaldes den fuldstændige løsning for pythagoræiske tripler.⁵⁹

Reglerne for paritet

Et helt tal a er lige, hvis det er et multiplum af 2, dvs. hvis $\exists n \in \mathbb{Z}$ så $a = 2n$. Et helt tal a er ulige, hvis $\exists n \in \mathbb{Z}$ så $a = 2n+1$. Der gælder følgende sammenhænge mellem to tals paritet:

(1) lige $\cdot$ lige = lige

(2) ulige $\cdot$ ulige = ulige

(3) lige $\cdot$ ulige = lige

(4) lige $\pm$ ulige = ulige

(5) mens to tal med samme paritet ved subtraktion og addition altid giver et lige tal.

⁵⁷ Hansen, Johan P., m.fl.: *Algebra og talteori*, Gyldendal, 2002, s. 96

⁵⁸ Definitionerne bygger på: Lützen, Jesper: *Diskrete Matematiske Metoder*, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, august 2011, s. 6-7

⁵⁹ Erickson, Martin, m.fl.: *Introduction to Number Theory*, Chapman & Hall/CRC, 2008, s. 308

Først redegøres for, at i en primitiv pythagoræisk tripel (x, y, z) , har x og y forskellig paritet:⁶⁰

Antages, at x og y begge er ulige, dvs. at der eksisterer $n, m \in \mathbb{Z}$, så:

$$x = 2n + 1$$

$$y = 2m + 1$$

gælder, at

$$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 1 + 4n$$

$$y^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 1 + 4m$$

og dermed er

$$z^2 = x^2 + y^2 = 4n^2 + 1 + 4n + 4m^2 + 1 + 4m = 2 + 4(n^2 + n + m^2 + m) = 2 + 4M$$

hvor $M = n^2 + n + m^2 + m$.

Kvadratet af det hele tal z skulle således være af formen $2 + 4M$, hvor $M \in \mathbb{Z}$, men dette er ikke muligt.

Sådanne kvadrater kan nemlig kun have formen

$$(2n)^2 = 4n^2$$

eller

$$(2n + 1)^2 = 1 + 4(n^2 + n)$$

x og y kan heller ikke begge være lige, idet de således ville have en fælles divisor, hvilket modsiger betingelsen om, at de er indbyrdes primiske.

Det kan uden indskrænkning antages, at x er lige og y er ulige (ellers kunne notationen blot ombyttes), hvilket dermed også gælder for deres kvadrater, jf. regel (1) og (2) for paritet. Af regel (4) følger desuden, at kvadraternes sum, z^2 , må være ulige, ligesom z , jf. (2), også må være det.

Nu vendes tilbage til ligningen⁶¹: $x^2 + y^2 = z^2$, hvoraf det direkte følger at:

$$x^2 = z^2 - y^2$$

Det vides, at differensen af to kvadrater kan skrives som de to tals sum gange deres differens:

$$x^2 = (z + y) \cdot (z - y)$$

Idet både z og y er ulige, er alle tre faktorer i ovenstående ligning lige tal, jf. regel (5) for paritet, dvs. multiplum af 2. Dermed kan opskrives, at:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{z + y}{2}\right) \cdot \left(\frac{z - y}{2}\right)$$

Med denne omskrivning er det muligt at klargøre, at højresidens to faktorer er indbyrdes primiske. For hvis d er en positiv fælles divisor for faktorerne, må den også dividere deres sum og differens, altså:

$$\frac{z + y + z - y}{2} = \frac{2z}{2} = z$$

og

$$\frac{z + y - z + y}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

Idet z og y er indbyrdes primiske må den fælles divisor d være 1.

Denne viden er nyttig, da det nu vides, at vi med ligningen:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{z + y}{2}\right) \cdot \left(\frac{z - y}{2}\right)$$

har at gøre med to tal, der er indbyrdes primiske, og hvis produkt er et kvadrat. Følgende lemma indføres, idet det netop beskriver egenskaberne for sådanne tal:

Hvis to positive heltal a og b er indbyrdes primiske, dvs. med $\text{sfd}(a, b) = 1$, og der samtidig gælder, at deres produkt er givet ved et kvadrat: $ab = c^2$, så er a og b selv kvadrattal, og kan således skrives som e^2 og f^2 , hvor e og f er to mindre, positive heltal.

⁶⁰ Redegørelsen bygger på: Jensen, Sven Toft, m.fl. (red.): *Matematiske idéer – en artikelsamling til større skriftlige opgaver*, Matematiklærerforeningen, 1993, s. 18 – artiklen "Fermats sidste sætning" af Steffen Due Bentzen

⁶¹ Resten af beviset bygger på: Erickson, Martin, m.fl.: *Introduction to Number Theory*, s. 306-308

Lemmaet bevises:

Det antages, at a har følgende primtalsfaktorisering (jf. aritmetikkens fundamentalsætning):

$$a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$$

Dvs. at a kan skrives som produktet af primtallene $p_i^{\alpha_i}$ fra 1 til k , altså:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Det påstås, at der findes et andet positivt heltal, e , der opløftet i anden potens vil være netop lig a . Hvis det antages, at e har primtalsopløsningen:

$$e = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$$

er a altså givet ved:

$$a = e^2 = \left(\prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i} \right)^2 = \prod_{i=1}^k p_i^{2 \cdot \beta_i}$$

Dermed er eksponenten $\alpha_i = 2 \cdot \beta_i$, hvis a er kvadratet af e . Sætningen må derfor være sand, hvis det vises, at α_i er lige for alle i . Det samme gør sig gældende for b .

Da $\text{sfd}(a, b) = 1$ ses det, at p_i ikke går op i b for $i = 1, 2, \dots, k$. I stedet har b en anden primtalsfaktorisering med et andet indeks i :

$$b = \prod_{i=k+1}^{k+m} p_i^{\alpha_i}$$

Da det er givet, at $c^2 = a \cdot b$, må primtalsfaktoriseringen af c^2 kunne skrives som produktet af de to netop definerede primtalsfaktoriseringer af a og b :

$$c^2 = a \cdot b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdot p_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \cdot \dots \cdot p_{k+m}^{\alpha_{k+m}}$$

Men da det også gælder, at $c^2 = c \cdot c$, må primtalsfaktoriseringen af c^2 også være givet ved kvadratet af c 's primtalsfaktorisering, som defineres til:

$$c = \prod_{j=1}^z p_j^{\delta_j}$$

Altså er:

$$c^2 = \left(\prod_{j=1}^z p_j^{\delta_j} \right)^2 = \prod_{j=1}^z p_j^{2 \cdot \delta_j}$$

Det er nu lykket at opskrive c^2 's primtalsfaktorisering på to forskellige måder. Men ifølge aritmetikkens fundamentalsætning har ethvert naturligt tal større end 1 en *entydig* primtalsfaktorisering. Dermed må de to udtryk være lig med hinanden:

$$\prod_{j=1}^z p_j^{2 \cdot \delta_j} = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{i=k+1}^{k+m} p_i^{\alpha_i}$$

Af entydigheden følger direkte, at $z = k + m$. Ved passende omordning af faktorerne vil dermed opnås at for hvert $j \in \{1, 2, \dots, z\}$ eksisterer netop ét $i \in \{1, 2, \dots, z\}$, så:

$$p_j^{2 \cdot \delta_j} = p_i^{\alpha_i}$$

Dermed er α_i et multiplum af 2, og lemmaet er **bevist**.

Der vendes nu tilbage til den udledte ligning:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{z+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{z-y}{2}\right)$$

og lemmaet anvendes. Højresidens faktorer kan således skrives som:

$$\left(\frac{z+y}{2}\right) = s^2$$

$$\left(\frac{z-y}{2}\right) = t^2$$

hvor $s, t \in \mathbb{N}$. Dette indsættes:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = s^2 \cdot t^2$$

Dermed kan x skrives som:

$$x = 2st$$

z kan bestemmes ved at isolere y i udtrykkene for s^2 og t^2 :

$$\begin{aligned} z + y &= 2s^2 \Rightarrow y = 2s^2 - z \\ z - y &= 2t^2 \Rightarrow y = z - 2t^2 \end{aligned}$$

Sættes disse to udtryk lig hinanden fås:

$$2s^2 - z = z - 2t^2$$

Som ved omskrivning giver:

$$s^2 + t^2 = z$$

y bestemmes tilsvarende ved at isolere z i begge udtryk:

$$\begin{aligned} z + y &= 2s^2 \Rightarrow z = 2s^2 - y \\ z - y &= 2t^2 \Rightarrow z = 2t^2 + y \end{aligned}$$

Udtrykkene sættes lig hinanden:

$$2s^2 - y = 2t^2 + y$$

og omskrives til:

$$s^2 - t^2 = y$$

Idet $\left(\frac{z+y}{2}\right) = s^2$ og $\left(\frac{z-y}{2}\right) = t^2$ er indbyrdes primiske, gælder det samme for s og t . Derudover gælder, at da det vides, at y er ulige, må s og t have forskellig paritet, jf. regel (4). Endelig er $s > t$, idet y er et positivt tal.

Dermed er det bevist, at en primitiv pythagoræisk tripel (x, y, z) kan udtrykkes som vist ved to positive heltal s og t , når disse opfylder ovenstående restriktioner.

Forarbejdet er nu udført, og det er muligt at bevise Fermats sidste sætning for $n = 4$. Metoden kaldes uendelig nedstigning eller "Fermat nedstigning". Den går ud på, at man antager, at der findes en løsning (x, y, z) , og ved hjælp af en række beregninger opnås en ny løsning (X, Y, Z) , hvor $Z < z$. Processen kan gentages uendeligt mange gange, men da vi har at gøre med positive heltal, vil en sådan nedstigning være

1) Hvis glemmer man at argumentere for at hvis $x^4 + y^4 = z^4$, er ikke x, y, z primiske, så kan vi dividere med den fælles divisor.
SRP

endelig, og metoden når således til en uundgåelig modstrid. Altså må første antagelse være forkert og ligningen ikke have nogle løsninger.⁶²

Der kigges på ligningen:

$$x^4 + y^4 = z^4, \quad x, y, z \in \mathbb{N}$$

Når den tomme løsningsmængde for denne er bevist, vil umuligheden $x^4 + y^4 = z^4$ være en direkte konsekvens, hvilket vises til sidst.

Det ses, at ligningen også kan skrives som:

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2 \quad 1)$$

og idet vi med nedstigningsmetoden antager, at der findes en løsning, kan den angribes som en primitiv pythagoræisk tripel, hvor det således antages at $\text{sfd}(x^2, y^2, z) = 1$.

Dermed vides det af den netop beviste løsning for en sådan tripel, at der eksisterer indbyrdes primiske heltal s og t med forskellig paritet, og hvor $s > t$, så (x^2, y^2, z) kan udtrykkes:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2st \\ y^2 &= s^2 - t^2 \\ z &= s^2 + t^2 \end{aligned}$$

På dette tidspunkt er det nyttigt at notere sig, at idet $\text{sfd}(s, t) = 1$, er også $\text{sfd}(s, 2t) = 1$. Det ses af udtrykket for x^2 også kan skrives som:

$$x^2 = s(2t)$$

og vi har dermed at gøre med en ligning af den type, der blev bevist i lemmaet: altså at to positive, indbyrdes primiske heltal kan skrives som kvadrater, når deres produkt er et kvadrat. Derfor indføres:

$$\begin{aligned} s &= u^2 \\ 2t &= v^2 \end{aligned}$$

hvor $u, v \in \mathbb{N}$.

Der kigges et øjeblik på udtrykket for y^2 . Ved at isolere s^2 i ligningen fås nemlig denne pythagoræiske tripel:

$$t^2 + y^2 = s^2$$

Det er kendt, at s og t er indbyrdes primiske, og denne viden er faktisk tilstrækkelig til at slutte, triplen er primitiv. For hvis man antog, at $\text{sfd}(t, y, s) = 1$, men samtidig at der fandtes et primtal p^{63} som dividerer både t og y , vil der af deres ovenstående relation følge, at p også dividerer s^2 (altså summen af to tal, som p er divisor for). Da p er et primtal gælder, jf. det fundamentale primtalslemma, at p også dividerer s , men dette modsiger antagelsen om, at de tre faktorer var indbyrdes primiske. Derfor tvinger en sådan antagelse følgende til at gælde:

$$\text{sfd}(t, y, s) = 1 \Rightarrow \text{sfd}(t, y) = 1$$

Altså har vi at gøre med en primitiv pythagoræisk tripel. Det er tidligere defineret, at y er ulige, og af definitionen af primitive pythagoræiske tripler følger dermed at t er lige, mens s er ulige. Løsningen kan således udtrykkes i to nye, indbyrdes primiske heltal, S og T , på følgende måde:

$$\begin{aligned} t &= 2ST \\ y &= S^2 - T^2 \\ s &= S^2 + T^2 \end{aligned}$$

Af udtrykket for t fås, at $2t = 4ST$. Dette sammenholdes nu med det forrige bestemte udtryk: $2t = v^2$, så det er muligt at sætte dette lighedstegn:

$$\begin{aligned} v^2 &= 4ST \Leftrightarrow \\ \frac{v^2}{4} &= ST \Leftrightarrow \\ \left(\frac{v}{2}\right)^2 &= ST \end{aligned}$$

Endnu engang har vi at gøre med en ligning af den type, der blev bevist i lemmaet, og dermed kan S og T skrives som to kvadrater:

⁶²Hansen, Johan P., m.fl.: *Algebra og talteori*, s. 102

⁶³ Enhver divisor d er enten et primtal eller produktet af primtal.

$$S = X^2$$

$$T = Y^2$$

Hvor det følger at:

$$X^4 + Y^4 = S^2 + T^2$$

Højresiden er netop defineret som et udtryk for s , der igen tidligere er defineret som u^2 . Det vil sige:

$$X^4 + Y^4 = u^2 = Z^2$$

Når det antages at $Z = u$, må (X^2, Y^2, Z) være løsning til ligningen:

$$x^4 + y^4 = z^2, x, y, z \in \mathbb{N}$$

Det kan nu tjekkes, om dette er en mindre løsning end den oprindelige (x^2, y^2, z) . Der mindes om, at $z = s^2 + t^2$, jf. løsningen til den oprindelige pythagoræiske ligning:

$$Z \leq u^2 = s$$

$$s < s^2 + t^2 = z$$

Altså er

$$Z < z$$

og der er foretaget en succesfuld nedstigning. Herfra kunne proceduren gentages på helt tilsvarende vis, nu med det nye udgangspunkt

$$X^4 + Y^4 = Z^2$$

og nedstigningen burde således kunne fortsætte i det uendelige. Da dette er umuligt, fortæller modstriden os, at ligningen ikke har heltallige løsninger.

Hermed følger, at Fermats sidste sætning for $n = 4$ heller ikke har heltallige løsninger. For hvis man antog, at der fandtes løsningen (x, y, z) , så ville løsningen (x, y, z^2) givet eksistere til ligningen

$$x^4 + y^4 = z^2$$

idet Fermats sidste sætning i dette specialtilfælde også kan skrives som:

$$x^4 + y^4 = (z^2)^2$$

Med nedstigning er det bevist, at dette ikke er muligt, og Fermats sidste sætning er dermed **sand** for $n = 4$.

Det kan tilføjes, at dette medfører, at Fermats sidste sætning også er bevist for alle n , hvor 4 er divisor: Dette kan indses ved at sætte $n = 4m$. Hvis

$$x^{4m} + y^{4m} = z^{4m}$$

havde en løsning (x, y, z) , ville der findes løsningen (x^m, y^m, z^m) til ligningen

$$x^4 + y^4 = z^2$$

idet dette kan opskrives som:

$$(x^m)^4 + (y^m)^4 = (z^m)^2$$

og en sådan løsning eksisterer ikke. Dermed er Fermats sidste sætning **sand** for alle n med divisoren 4.⁶⁴

Sophie Germain's bidrag

Da ethvert heltal større end to enten er et multiplum af 4 eller indeholder en ulige primtalsfaktor, virker det logisk, at det netop var mængden af ulige primtal, Sophie Germain kastede sig over. I dag er hun mest kendt for at formulere "Sophie Germain's sætning", der beviser Fermats sidste sætning, hvis eksponenten er en særlig mængde af ulige primtal mindre end 100. Hun nåede dog aldrig at overføre beviset til uendeligt mange af denne type eksponenter.

Sophie Germain's sætning bygger på principper fra den talteoretiske gren modulær aritmetik. Her beskæftiger man sig med den rest, der fremkommer, når ét tal divideres med et andet. Hvis man således har et tal $n \in \mathbb{N}$,

⁶⁴Beviset for specialtilfældet $n = 4$ behandles i Erickson, Martin, m.fl.: *Introduction to Number Theory*, Chapman & Hall/CRC, 2008, s. 326-329.

og $a, b \in \mathbb{Z}$, hedder det i modulær aritmetik, at a er ækvivalent med b modulo n , hvis og kun hvis n dividerer $(a - b)$. Med matematiske symboler noteres det:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow n|(a - b)$$

Af dette følger, at $a \equiv b(\text{mod } n)$ hvis og kun hvis a og b har samme rest ved division med n , dvs. hvis der findes et tal $k \in \mathbb{Z}$ så $a = b + kn$.

I modulær aritmetik arbejdes desuden med begrebet restklasser. En restklasse består af alle de hele tal, der ved division med n har den samme rest. Der gælder, at modulo n kun har et endeligt antal restklasser, nemlig $[1], [2], \dots [n - 1]$.⁶⁵

Sophie Germain udgav aldrig selv sit arbejde med Fermats sidste sætning. I stedet blev hun krediteret for sin sætning i en fodnote i en afhandling af hendes korrespondent Legendre fra 1823 om samme emne. Senere undersøgelser har vist, at dette blot var en meget lille del af hendes arbejde, men ikke desto mindre det eneste alment kendte, og dermed den idé, som flere matematikere efterfølgende anvendte til beviset for adskillige specialtilfælde. Legendre selv anvendte hendes sætning til at bevise $n = 5$, mens en anden fransk matematiker, Gabriel Lamé, i 1839 beviste $n = 7$ med sætningens hjælp.⁶⁶

Sophie Germain's sætning har følgende ordlyd⁶⁷:

Hvis der for en ulige primtalseksponent p eksisterer et "hjelpeprimtal" θ , så der ikke findes to på hinanden følgende p 'te potenser af alle de mulige rester modulo θ , ligesom p heller ikke selv må være en p 'te potens af en mulig rest modulo θ , så skal enten x , y eller z kunne divideres med p^2 for enhver løsning af Fermats ligning

$$x^p + y^p = z^p$$

At der ikke må være "to på hinanden følgende p 'te potenser af alle de mulige rester modulo θ " vil sige, at forskellen på de to rester, der fremkommer, når to p 'te potenser af mulige rester divideres med θ skal være større end 1.

Sophie Germain viste, at hvis p sammen med et hjelpeprimtal θ opfyldte hendes sætnings to betingelser, skulle enten x , y eller z kunne divideres med p^2 , for at Fermats ligning havde løsninger. Dermed beviste hun sætningen for de værdier af $p < 100$, der ikke var divisor i hverken x , y eller z – for hvis p ikke var divisor havde ligningen altså ingen løsninger med denne eksponent. (Overgangen fra p^2 til p sker som følge af det fundamentale primtalslemma).

Med andre ord førte hendes arbejde til, at man herefter opdelte løsningsmængden for Fermats ligning i to tilfælde⁶⁸:

- 1) Eksponenten p er ikke divisor for hverken x , y eller z .
- 2) Eksponenten p er divisor for enten x , y eller z .

Af disse definitioner fremgår det, at Sophie Germain med sin sætning beviste første tilfælde for de eksponenter p mindre end 100, der opfyldte hendes betingelser.

⁶⁵ Lützen, Jesper, s. 188-189

⁶⁶ Laubenbacher, Reinhard, m.fl., *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*, s. 193

⁶⁷ Laubenbacher, Reinhard, m.fl.: "Voici ce que j'ai trouvé": Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem, 70 siders projekt om Sophie Germain's matematiske bedrifter udgivet af to professorer fra hhv. Virginia State University og New Mexico State University, 24. januar 2010. Det kan ses på internetsiden: <http://sofia.nmsu.edu/~davidp/germain06-ed.pdf>

⁶⁸ Riddle, Larry: *Sophie Germain and Fermat's Last Theorem*, Agness Scott College, Department of Mathematics, 21. juli 2009, <http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/germain-flt/sgandflt.htm>

For at få en dybere forståelse af sætningen, kan det være nyttigt at betragte et eksempel og undersøge, om dette opfylder Sophie Germain's sætning⁶⁹:

Lad os sætte $p = 3$ og $\theta = 13$. Ifølge sætningen skal vi nu koncentrere os om alle rester af 3. potens modulo θ . Om modulær aritmetik vides, at der ved modulo 13 kun findes de mulige rester 1,2,3,...,12, og vi undersøger således de rester, der vil fremkomme, når disse 12 rester opløftes i 3. potens modulo 13. Da vi har at gøre med 3. potenser, kaldes disse kubiske rester. Følgende skema kan opstilles:

Rest	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Rest ³	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728
Kubisk rest	1	8	1	12	8	8	5	5	1	12	5	12

De kubiske rester er altså bestemt ved at dividere hvert tal i midterste række med 13, og notere den tilbageværende rest. Eksempelvis går 13 op i 27 to gange med 1 til rest.

Det kan nu konkluderes, om $p = 3$ og $\theta = 13$ opfylder Sophie Germain's sætning:

Det ses, at ingen af de kubiske rester har forskellen 1 – dermed er første betingelse opfyldt.

Derudover fremgår det, at p selv, altså 3, ikke er en af de kubiske rester – dermed er anden betingelse også opfyldt. Således kan man med Sophie Germain's sætning nu slutte, at enhver løsning til ligningen

$$x^3 + y^3 = z^3$$

må opfylde, at enten x , y eller z har divisoren $3^2 = 9$.

Sophie Germain er ofte blevet miskrediteret for sit bidrag. Hendes sætning er af mange forfattere efterfølgende blevet præsenteret i svagere udgaver eller hvor dele af den er tilskrevet Legendre frem for hende. Det mest kendte eksempel herpå er den antagelse, at sætningen kun gælder, hvis hjælpeprimtallet θ er af formen $2p + 1$. Sådanne primtal er kendt som "Germain primtal", og opfylder ganske rigtigt altid hendes sætning, men ekskluderer visse hjælpeprimtal, der også ville virke for nogle værdier af p .⁷⁰

*"Jeg har aldrig formået at nå til uendeligt mange værdier af p , selvom jeg har skubbet grænserne ret langt. Du kan nemt tænke dig, Monsieur, at det er lykket mig at bevise, at denne ligning ikke er mulig undtagen med tal, hvis størrelse skræmmer fantasien. Men alt dette er stadig ikke nok; det kræver det uendelige og ikke bare det meget store."*⁷¹

Således skrev Sophie Germain afslutningsvis i det brev til Gauss, hvor hun præsenterede sin sætning. Men Gauss var på dette tidspunkt ikke optaget af talteori og besvarede aldrig hendes brev.

Undersøgelser af Germain's arbejde slår fast, at hun var en uhyre talentfuld teoretisk matematiker. Men på trods af brevvekslingerne med Gauss og Legendre, tyder meget på, at hun arbejdede ekstremt isoleret. Det store og nødvendige privilegium som matematiker – nemlig at andre ligesindede vurderer og tager stilling til ens arbejde – oplevede Germain slet ikke på samme måde, som hendes mandlige kollegaer på denne tid. De fejl, som hendes forskning indeholdt, blev aldrig rettet på denne måde, og meget af hendes arbejde blev

⁶⁹ Eksemplet bygger ligeledes på de to professorers projekt "Voici ce que j'ai trouvé": Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem, s. 10-11, <http://sofia.nmsu.edu/~davidp/germain06-ed.pdf>

⁷⁰ Laubenbacher, Reinhard, m.fl.: "Voici ce que j'ai trouvé": Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem, s. 12, <http://sofia.nmsu.edu/~davidp/germain06-ed.pdf>

Et eksempel på en bog, der lige netop præsenterer hendes sætning som gældende udelukkende for hjælpeprimtal af formen $2p + 1$ er: Ribenoim, Paulo: 13 lectures on Fermat's Last Theorem, Springer-Verlag New York Inc., 1979, s. 55

⁷¹ Rehmeier, Julie: A Mathematical Tragedy, ScienceNews, 2000, http://www.sciencenews.org/view/generic/id/9426/title/A_Mathematical_Tragedy

ganske enkelt aldrig læst.⁷² Det er på dette grundlag, at det i dag er muligt at slutte, at hun aldrig fik den anerkendelse, hun egentlig fortjente.

Omverdenen havde ganske enkelt ikke kendskab til omfanget af hendes resultater. Den anerkendelse, hun fik af Lagrange og ikke mindst Gauss, har givet hende flere muligheder end de fleste andre kvinder i samtiden, men når udgangspunktet reelt var, at jo mindre uddannelse en kvinde havde, jo bedre, var Sophie Germaines muligheder stadig uendeligt langt fra mændenes. Selvfølgelig først og fremmest på grund af de begrænsninger, der fulgte de reelle love om kvinders udelukkelse fra højere uddannelsesinstitutioner, men også bare på grund af den konstante misbilligelse fra samfundet, som Germain hele tiden måtte kæmpe imod. Den historisk lave procentdel af store kvindelige matematikere, er den direkte konsekvens af dette samfund. At blive en anerkendt kvindelig akademiker i Frankrig på Germaines tid virker med blot det mindste kendskab til samfundets kvindesyn som en umulig opgave.

Akademiske præstationer skyldes selvfølgelig først og fremmest individets intellekt, men mange evner kan unægtelig gå tabt, hvis individet mødes med nok modstand.

Dermed havde Gauss på mange måder ret, da han i sit brev til Germain efter afsløringen af hendes sande identitet erkendte, at når hun alligevel formåede at bidrage til matematikken på så overbevisende og banebrydende vis, måtte det skyldes et talent, der overgik mange af hendes mandlige kollegaers. En erkendelse, der understreger uretfærdigheden i, at hun hele sin karriere igennem konstant befandt sig i periferien af det matematiske samfund.

Hendes køn må utvivlsomt også have været årsagen til, at det hverken lykkedes hende at udgive sit arbejde med Fermats sidste sætning eller med elastiske pladers svingninger. Det virker paradoksalt, at det videnskabsakademi, der sent i hendes liv inviterede hende til at følge semestrene, aldrig ville udgive hendes reelle, akademiske opdagelser.

Det, der senere er blevet skrevet om hende, er først og fremmest historier om hendes liv og hendes kamp som lærd kvinde. Når det drejer sig om hendes matematiske arbejde, er udvalget af kilder langt mere begrænset. Sophie Germain var forud for sin tid. Det samfund, hun levede i, begrænsede hende i sådant et omfang, at verden aldrig vil finde ud af, hvor stor en talteoretiker, hun egentlig var.

Konklusion

Sophie Germain levede et revolutionært liv. Omkring hende gennemgik hele det franske samfund en voldsom politisk revolution, mens hun selv revolutionerede talteorien og ikke mindst studierne af Fermats sidste sætning.

Denne påstod, at

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ikke har heltallige løsninger for $n > 2$. På den 350 år lange vej fra sætningen blev formuleret, til den blev endeligt bevist, udgjorde hendes bidrag en betydelig rolle, og optog hende dermed i den liga af store matematikere, der alle ydede en mindeværdig indsats til dette vanskelige problem. Fermats sidste sætning har altid været det helt store trofæ i talteorien – ikke på grund af dens indflydelse på øvrig matematik eller dens betydning for beviserne af andre sætninger, men ganske enkelt på grund af dens ry som den mest krævende opgave, matematikken nogensinde har set. Da Andrew Wiles beviste sætningen i 1995, opnåede han således en form for prestige, som intet andet bevis kunne have givet ham. Men med bevisets metode blev det klart, at sætningen behøvede den 350 år lange matematiske udvikling, og hverken Fermat eller Sophie Germain havde altså umiddelbart muligheden for at bevise den. Alligevel lagde de fundamentet.

Fermat beviste selv sætningen for eksponenten 4, og dermed også for alle eksponenter, hvor 4 er divisor. Han benyttede sig af et modstridsbevis, der byggede på metoden ”uendelig nedstigning”. For ved at antage,

⁷² Her henvises endnu engang til Laubenbacher, Reinhard, m.fl.: ”Voici ce que j’ai trouvé”: *Sophie Germain’s grand plan to prove Fermat’s Last Theorem*, <http://sofia.nmsu.edu/~davidp/germain06-ed.pdf>, idet dette projekt tager udgangspunkt i alt det arbejde, Sophie Germain aldrig blev anerkendt for.

at der eksisterede en løsning til hans ligning, kunne han bevise, at der følger også fandtes en mindre løsning, hvorfra han igen kunne bevise at der fandtes en endnu mindre løsning, og disse nedstigende løsninger kunne fortsætte i det uendelige. Modstriden bestod i, at Fermats sidste sætning var et diofantisk problem, der skulle besvares med positive hele tal. For denne type tal er nedstigningen endelig, og dermed måtte hans sætning i disse tilfælde være sand.

Det banebrydende i Sophie Germain's idé var, at hun valgte en generel tilgang til problemet, og endte da også med at bevise den for en større mængde af eksponenter. Hun formulerede dette i "Sophie Germain's sætning", og viste overordnet, at hvis et ulige primtal p sammen med et hjælpeprimtal θ opfyldte hendes sætnings to betingelser, *skulle* enten x , y eller z kunne divideres med p^2 , for at Fermats ligning havde løsninger. Dermed beviste hun Fermats sidste sætning for de værdier af $p < 100$, der ikke var divisor i hverken x , y eller z . Omverdenen fik kendskab til denne idé gennem en fodnote i en afhandling af matematikeren Legendre – en kreditering, hvis omfang er direkte proportional med Germain's køn.

For på dette tidspunkt rummede det franske samfund det store paradoks at ønske lighed og frihed for enhver pris men samtidig bevare kvindernes underlegenhed. Menneskerettigheder og kvinderettigheder var to vidt forskellige ting, og man mente slet ikke, at det kvindelige intellekt kunne administrere politisk indflydelse. Det samme gjaldt naturligvis al form for akademisk uddannelse. *Kvinder bør ikke vide så mange ting*, som det hed sig, på trods af, at der samtidig fandtes mange varme fortalere for al viden og uddannelse, der i denne periode blev vigtigere og vigtigere. Men det er sjovt som rationalisme så ubesværet kunne gå hånd i hånd med kvindeundertrykkelse. At det virkelig har kunne forsvares for eksempelvis en encyklopædist, der hver dag arbejdede med at gøre al verdens viden tilgængelig for *alle*, at afslutte sin arbejdsdag med en tur i teatret og åbenlyst more sig over latterliggørelsen af lærde kvinder.

Der er ingen tvivl om, at samfundet udviklede sig – de almindelige borgere kæmpede sig til lige muligheder med kirken og adelen, verdenen blev præget af oplysning og rationalitet, ligesom man i ønsket om at kunne ansætte de bedst muligt egnede til at varetage statens interesser oprettede elitære universiteter. Men man havde sørget for, at hægte kvinderne godt og grundigt af. Man fratog dem ganske enkelt mulighederne for både politisk indflydelse og universitetsuddannelser, og fik i stedet slået juridisk fast, at de var underlagt deres fader eller ægtemand. Den dag i dag har Frankrig stadig meget kønsopdelte roller sammenlignet med andre vesteuropæiske lande, og det er et foruroligende faktum, at École Polytechnique faktisk først gav kvinder adgang i 1972.⁷³

Ikke desto mindre havde institutionen afgørende betydning for Sophie Germain. Med sit store matematiske talent opnåede hun accept fra enkelte, venligtsindede mandlige matematikere, som vækkede hendes talteoretiske interesse, og som gjorde, at hun forsøgte sig med problemet over dem alle. Men som følge af samfundets ekskluderende lighedsprincip befandt hun sig for evigt i en isolation, der influerede hendes arbejde, og skjulte mange af hendes opdagelser fra omverdenen. Den delvise anerkendelse, hun opnåede på trods, skyldtes et matematisk talent, det simpelthen var umuligt at forbigå, samt en passion for sit felt, der satte matematikken højere end alt andet.

Hendes akademiske indsats var af så original og banebrydende karakter, at den unægtelig fortjente stor anerkendelse og dyb respekt – noget, samfundet aldrig ville give hende i det rette omfang.

Historien om Fermats sidste sætning og historien om Sophie Germain er begge præget af mange vanskeligheder og forhindringer. På samme måde som sætningen krævede en mangeårig matematisk udvikling før dens sandhed kunne blive endeligt anerkendt, krævede en passende anerkendelse af Sophie Germain's bedrifter en tiltrængt samfundsmæssig udvikling. Desværre kom udviklingen til at strække sig over meget længere tid, end hun kunne nå at opleve.

⁷³ Adgangsåret er fundet på École Polytechniques egen hjemmeside som en del af artiklen: Hermann, Claudine: *Women and science: an impossible love story?*, <http://www.polytechnique.edu/accueil/reseaux-polytechniciens/claudine-hermann-40893.kjsp?RH=ACCUEIL-EN>

Litteraturliste

Bøger

Adriansen, Inge, Claus Friisberg, Pernille Ipsen Hamilton, Karl-Johann Hemmersam, Birgitte Holten, Ulrik Langen, Carsten Lykke-Kjeldsen: *Fokus – kernestof i historie 2: Fra oplysningstid til imperialisme*, Gyldendal, 2007, kapitel 2: "Oplysningstiden" og kapitel 3: "Revolutioner"

Erickson, Martin, Anthony Vazzana: *Introduction to Number Theory*, Chapman & Hall/CRC, 2008, kapital 9: "Diophantine Equations"

Frederiksen, Peter, Knud Ryg Olsen, Olaf Sønderberg: *Grundbog til historie, Verdenshistorien 1750-1945*, Systime, 2001, kapitel 1: "De store revolutioner 1750-1850"

I denne bog er desuden anvendt følgende kildetekster:

- Tekst 11: *Kvindetoget i Versailles*, uddrag fra beretning af demonstranten Marie-Louise Lenoël, der bygger på hendes vidnesbyrd et år efter begivenheden
- Tekst 12: *Modstand mod afskaffelsen af privilegierne*, uddrag fra hofdame Madame de La Tour du Pins erindringer.
- Tekst 13: *Menneskerettighedserklæringen, 1789*, vedtaget i Nationalforsamlingen 26. august 1789
- Tekst 14: *Kvinderettighedserklæringen, 1791*, formuleret af Olympe de Gouges i 1791
- Tekst 16: *Politisk liberalisme*, udsnit fra værket "Lovenes ånd" udgivet i 1748 af Montesquieu

Hansen, Johan P., Henrik Gadegaard Spalk: *Algebra og talteori*, Gyldendal, 2002, kapitel 12: "Om Fermats sidste sætning"

Høffding, Niels: *Revolutionen, Napoleon og kvinderne*, Gyldendal, 2001

Jensen, Sven Toft, Jesper Matthiasen (red.): *Matematiske idéer – en artikelsamling til større skriftlige opgaver*, Matematiklærerforeningen, 1993, artiklen "Fermats sidste sætning" af Steffen Due Bentzen, Aarhus Universitet

Laubenbacher, Reinhard, David Pengelley: *Mathematical Expeditions : Chronicles by the explorers*, Springer, 1999, kapitel 4: "Number theory: Fermat's Last Theorem"

Lützen, Jesper: *Diskrete Matematiske Metoder*, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, august 2011

Mozans, H.J.: *Women in Science*, University of Notre Dame Press, 1913, 3. udgave, 1991

Osen, Lynn M., *Women in Mathematics*, The Massachusetts Institute of Technology, 1974

Perl, Teri: *Math Equals*, Addison-Wesley Publishing Company, 1978

Ribenboim, Paulo: *13 lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag New York Inc., 1979, "Lecture IV: The Naïve Approach"

Singh, Simon: *Fermats store sætning*, Gyldendal, 1997

Internetsider

Hermann, Claudine: *Women and science: an impossible love story?*, École Polytechnique, besøgt d. 17-12-2011, <http://www.polytechnique.edu/accueil/reseaux-polytechniciens/claudine-hermann-40893.kjsp?RH=ACCUEIL-EN>

Laubenbacher, Reinhard, David Pengelley: "Voici ce que j'ai trouvé": *Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem*, 70 siders projekt om Sophie Germain's matematiske bedrifter udgivet af to professorer fra hhv. Virginia State University og New Mexico State University, 24. januar 2010. Det kan ses på internetsiden besøgt d. 16-12-2011: <http://sofia.nmsu.edu/~davidp/germain06-ed.pdf>

Lek-Heng Lim: *The proof of Fermat's last theorem*, Stanford University – Department of Mathematics, besøgt d. 09-12-2011, <http://math.stanford.edu/~lekheng/flt/index.html>

Lewis, Jone Johnson: *Olympe de Gouges and the Rights of Women*, About.com – part of the New York Times Company, 2009, besøgt d. 10-12-2011, <http://womenshistory.about.com/od/olympedegouges/a/Olympe-De-Gouges-And-The-Rights-Of-Woman.htm>

Maréchal, Sylvain: *Manifesto of the Equals*, 1796, det oprindelige manifest fundet på internetsiden <http://www.marxists.org/history/france/revolution/conspiracy-equals/1796/manifesto.htm>, en del af det såkaldte Marxists Internet Archive, besøgt d. 07-12-2011. Manifestet er oversat i 2004 af Mitchell Abidor

Markham, J. David: *The Revolution, Napoleon and Education*, The International Napoleonic Society, 2005, besøgt d. 13-12-2011, http://www.napoleon-series.org/ins/markham/c_education_m.html#16

Rehmeyer, Julie: *A Mathematical Tragedy*, ScienceNews, 2000, besøgt d. 17-12-2011, http://www.sciencenews.org/view/generic/id/9426/title/A_Mathematical_Tragedy

Riddle, Larry: *Sophie Germain and Fermat's Last Theorem*, Agness Scott College, Department of Mathematics, 21. juli 2009, besøgt d. 16-12-2011, <http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/germain-flt/sgandflt.htm>

Det oprindelige referat af retssagen mod Olympe de Gouges: *The trial of Olympe de Gouges, 1793*, fundet på internetsiden "Liberty, equality, fraternity – exploring the French Revolution", Center for history and new media, besøgt d. 07-12-2011, <http://chnm.gmu.edu/revolution/d/488/>

"The major periods in the School history": *Revolutionary beginnings*, École Polytechnique, besøgt d. 13-12-2011, <http://www.polytechnique.edu/home/about-ecole-polytechnique/history-and-heritage/the-major-periods/the-major-periods-in-the-school-history--23918.kjsp?RH=1262193092595>

Historisk tidslinje med titlen: *Hvornår fik verdens kvinder valgret?*, Kvininfo, besøgt d. 10-12-2011, <http://www.kvininfo.dk/side/508/>

Film

Singh, Simon, *Fermat's last theorem*, BBC, 1996,